minærva

AS

5

SKRIPT

Himmelsmechanik und Raumfahrt

Erklärskript

Die Aufgaben 133–168 zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Verweise auf Aufgaben sind Links.

Astronomie – Klasse 7 bis Kursstufe

Pirmin Gohn

Nutzungshinweis: Dieses Skript darf nur im Rahmen des Unterrichts verwendet werden; insbesondere ist die eigenständige Weitergabe untersagt.

Skriptreihe AS · Astronomie (Klasse 7 bis Kursstufe)

AS1 Himmel	**AS2** Erde und Mond	**AS3** Sonnensystem	**AS4** Sonne	**AS5** Himmelsmechanik
AS6 Licht aus dem All	**AS7** Planeten und Leben	**AS8** Sterne	**AS9** Sternentwicklung	**AS10** Kosmos

Lernen mit minærva

Dieses Skript ist ein Teil von minærva. Alles gehört zusammen: Jedes Thema führt von der Erklärung zum Üben, zum Ausprobieren und ins große Bild.

minaerva.de

Skripte Verstehen
Der Stoff zum Nachlesen: Erklärungen, Herleitungen, Beispiele und typische Fehler.
minaerva.de

noctua Üben
Fragen zu jedem Abschnitt, mit sofortiger Rückmeldung.
noctua.minaerva.de

fabrica Ausprobieren
Versuche und Anschauungen zum Selbermessen und Anfassen, ohne Konto, auch auf dem iPad.
fabrica.minaerva.de

tela Vernetzen
Das Wissensnetz: worauf ein Thema aufbaut und wohin es führt.
tela.minaerva.de

So greifen die Skripte ineinander

Erklärskripte	Astronomie: zehn Themenskripte AS1–AS10 von Klasse 7 bis zur Kursstufe mit dem Stoff, aber ohne Aufgaben. Unter jeder Abschnittsüberschrift steht, aus welchem Bildungsplan der Stoff stammt (Physik, IMP, Basisfach Astrophysik, Wahlfach Astronomie) oder ob er Zusatz ist.
Aufgabenskript	Ein gemeinsames Aufgabenskript für alle Themen. Die Erklärskripte verweisen darauf; jede Aufgaben-, Abbildungs- und Tabellennummer gibt es in der Reihe nur einmal.
Lösungsskript	Die Lösungen zu allen Aufgaben, mit denselben Nummern.

Am Ende vieler Abschnitte stehen Links zur passenden Übung, zum Versuch und ins Wissensnetz. In der PDF-Datei lassen sie sich direkt antippen.

Inhaltsverzeichnis

Worum es geht ... 4
1 Das Gravitationsgesetz ... 5
1.1 Vom Apfel zum Mond ... 5
1.2 Das Gravitationsgesetz ... 5
1.3 Die Erde wiegen ... 6
1.4 Gravitationsfeld und Schwerelosigkeit ... 7
2 Erstes und zweites Keplersches Gesetz ... 9
2.1 Vom Kreis zur Ellipse ... 9
2.2 Die Ellipse ... 9
2.3 Das erste Keplersche Gesetz ... 10
2.4 Das zweite Keplersche Gesetz ... 11
3 Drittes Keplersches Gesetz und Massenbestimmung ... 13
3.1 Das dritte Keplersche Gesetz ... 13
3.2 Newton begründet Kepler ... 14
3.3 Massen von Himmelskörpern ... 14
3.4 Das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße ... 15
4 Satelliten, geostationäre Bahn, Fluchtgeschwindigkeit ... 17
4.1 Vom Wurf zur Umlaufbahn ... 17
4.2 Satellitenbahnen ... 17
4.3 Die geostationäre Bahn ... 18
4.4 Fluchtgeschwindigkeit ... 19
4.5 Bahnformen und kosmische Geschwindigkeiten ... 20
5 Bahnen in kleinen Schritten berechnen ... 22
5.1 Warum kleine Schritte? ... 22
5.2 Das Rechenschema ... 22
5.3 Eine Satellitenbahn von Hand ... 22
5.4 Mit dem Computer: Schrittweite und Genauigkeit ... 23
6 Raketen und Geschichte der Raumfahrt ... 25
6.1 Das Rückstoßprinzip ... 25
6.2 Schub und Raketengleichung ... 25
6.3 Raketenstart in kleinen Schritten ... 26
6.4 Geschichte der Raumfahrt ... 27
6.5 Nutzen und Probleme der Raumfahrt ... 28

Worum es geht

An einem klaren Abend kurz nach Sonnenuntergang zieht manchmal ein heller Lichtpunkt ohne zu blinken lautlos über den Himmel, in wenigen Minuten von einem Horizont zum anderen. Das ist die Internationale Raumstation ISS. Sie fliegt in rund 400 km Höhe mit fast 28 000 km pro Stunde und umrundet die Erde in eineinhalb Stunden. Einen Motor, der sie oben hält, hat sie nicht. Warum fällt sie nicht herunter?

Die Antwort lautet: Sie fällt – ständig, aber sie fällt um die Erde herum. Dahinter steckt dieselbe Kraft, die einen Apfel vom Baum fallen lässt, den Mond auf seiner Bahn hält und die Planeten um die Sonne führt: die **Gravitation**. Dieses Skript zeigt, wie Isaac Newton diese Kraft beschrieben hat (Kapitel 1), welche Gesetze Johannes Kepler für die Bahnen der Planeten fand (Kapitel 2) und wie man mit dem dritten Keplerschen Gesetz die Sonne, den Jupiter und sogar das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße „wiegen“ kann (Kapitel 3). Kapitel 4 behandelt Satelliten, die geostationäre Bahn und die Geschwindigkeit, mit der man der Erde ganz entkommt. Kapitel 5 zeigt, wie ein Computer Bahnen in vielen kleinen Schritten berechnet, und Kapitel 6, wie Raketen funktionieren und wie die Raumfahrt begann.

Gebraucht werden Kreisbewegung, Kraft und Energie aus dem Physikunterricht. Was davon nötig ist, wird an Ort und Stelle wiederholt.

> **Himmelsmechanik und Raumfahrt im Lehrplan.** Stufe: Klasse 10 bis Kursstufe. Welcher Plan welchen Abschnitt verlangt, sagen die Marken unter den Überschriften. Kern des Skripts ist der Teil „Himmelsmechanik und Astrophysik“ des Profilfachs IMP in Klasse 10 samt der Methode der kleinen Schritte; das dritte Keplersche Gesetz mit der Massenbestimmung ist auch Stoff des Wahlfachs Astronomie. Kosmische Geschwindigkeiten, Raketengleichung und Geschichte der Raumfahrt sind Bonus aus anderen Ländern.

Quellen-Marken. Unter jeder Abschnittsüberschrift steht, aus welchem Bildungsplan Baden-Württembergs der Stoff stammt: Physik 7/8 | IMP 8 | IMP 9 | IMP 10 für die Mittelstufe (Physik und Profilfach IMP), Basisfach Astrophysik | Wahlfach Astronomie für die Kursstufe (Physik-Basisfach mit Schwerpunkt Astrophysik, Wahlfach Astronomie). Zusatz heißt: Der Abschnitt steht in keinem dieser Pläne, gehört aber in anderen Ländern zum Pflichtstoff Astronomie (Sachsen-Anhalt, Mecklenburg-Vorpommern, Thüringen) und ist hier Bonus.

Die Aufgaben zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript der Reihe, die Lösungen im Lösungsskript. Jedes Kapitel endet mit Verweisen auf passende Übungen in **noctua** und Stationen in **fabrica**. Fachbegriffe sind beim ersten Auftreten **fett** gesetzt und am Ende jedes Kapitels in einem Kasten zusammengefasst.

1 Das Gravitationsgesetz

1.1 Vom Apfel zum Mond

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Ein Apfel fällt vom Baum, ein Stein, den man waagerecht wirft, fliegt im Bogen zu Boden. Der Mond dagegen kreist seit Milliarden Jahren um die Erde, ohne herunterzufallen. Lange hielt man das für zwei völlig verschiedene Dinge: Auf der Erde fällt alles nach unten, am Himmel bewegt sich alles auf ewigen Kreisen.

Isaac Newton hatte um 1666 eine kühne Idee (die Geschichte vom fallenden Apfel in seinem Garten hat er selbst später erzählt): Vielleicht ist es **dieselbe** Kraft, die den Apfel zu Boden zieht und den Mond auf seiner Bahn hält. Der Mond würde ohne Kraft geradeaus weiterfliegen (Trägheitsprinzip). Dass er auf einer Kreisbahn bleibt, heißt: Er wird ständig zur Erde hin abgelenkt – er **fällt**, nur kommt er dabei nie unten an, weil er sich gleichzeitig schnell seitwärts bewegt.

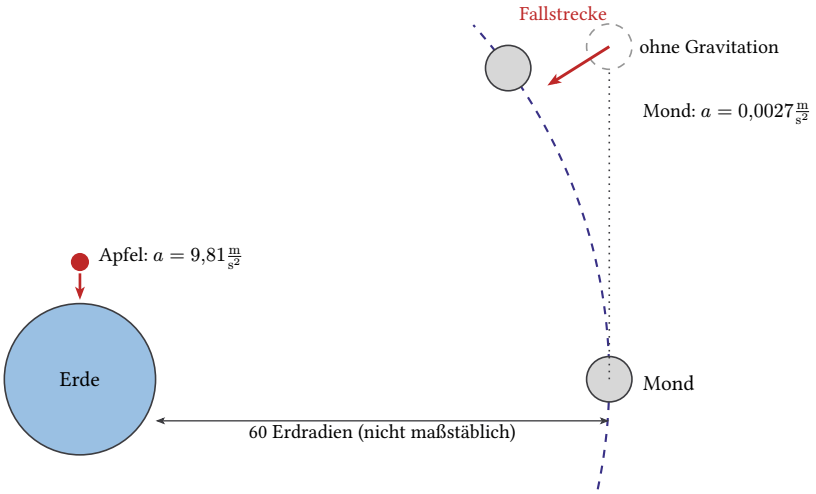


Abbildung 67: Newtons Vergleich (nicht maßstäblich): Ohne Gravitation flöge der Mond auf der geraden Linie weiter. Tatsächlich „fällt“ er in jedem Augenblick ein Stück zur Erde hin und bleibt so auf seiner Kreisbahn.

Wenn es dieselbe Kraft ist, muss sie mit der Entfernung schwächer werden, denn der Mond „fällt“ viel langsamer als der Apfel. Newton vermutete, dass sie mit dem Quadrat des Abstands abnimmt. Das konnte er am Mond prüfen: Der Mond ist rund 60 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt, der Apfel einen Erdradius. Dann müsste die Beschleunigung des Mondes $60^2 = 3600$-mal kleiner sein als g.

Beispiel 1

Newtons Mondrechnung. Der Mond umkreist die Erde im Abstand $r = 384\,400$ km in $T = 27{,}3$ Tagen $= 2{,}36 \cdot 10^6$ s. Für eine Kreisbewegung ist die **Zentripetalbeschleunigung**

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}844 \cdot 10^8\ \mathrm{m}}{(2{,}36 \cdot 10^6\ \mathrm{s})^2} \approx 0{,}0027 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Zum Vergleich: $\frac{g}{60^2} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{3600} \approx 0{,}0027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Die beiden Werte stimmen überein.

Merksatz

Der Mond fällt – um die Erde herum. In jeder Sekunde legt er gut einen Kilometer auf seiner Bahn zurück und weicht dabei nur 1,4 mm von der geraden Linie zur Erde hin ab. In einer Minute fällt er so weit wie ein Apfel in der ersten Sekunde: knapp fünf Meter.

1.2 Das Gravitationsgesetz

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Newton veröffentlichte sein Gesetz 1687 in den „Principia“. Es gilt nicht nur für Erde, Apfel und Mond, sondern für **alle** Körper: Je zwei Massen ziehen einander an. Diese Massenanziehung heißt **Gravitation**.

Merksatz

Gravitationsgesetz. Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte den Abstand r haben, ziehen sich gegenseitig an mit der Kraft

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Die **Gravitationskonstante** hat den Wert $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

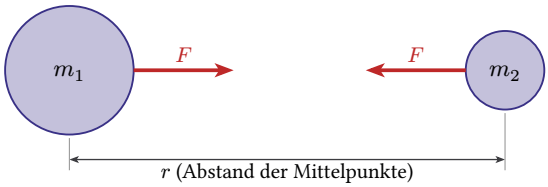


Abbildung 68: Zwei Körper ziehen einander mit gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften an. Bei Kugeln zählt der Abstand der Mittelpunkte.

Was in dem Gesetz steckt:

- Die Kraft ist proportional zu **beiden** Massen: doppelte Masse, doppelte Kraft.
- Sie nimmt mit dem **Quadrat des Abstands** ab: doppelter Abstand, ein Viertel der Kraft; zehnfacher Abstand, ein Hundertstel. Das ist dasselbe Gesetz wie bei der Bestrahlungsstärke einer Lampe oder eines Sterns (Skript AS8), und aus demselben Grund: Die Wirkung verteilt sich auf Kugelflächen, deren Inhalt $4\pi r^2$ mit r^2 wächst.
- Beide Körper ziehen **gleich stark** aneinander (**Wechselwirkungsprinzip**, „actio gleich reactio“). Der Apfel zieht die Erde genauso stark an wie die Erde den Apfel; nur ist die Beschleunigung der riesigen Erde unmessbar klein.
- Die Gravitation wirkt immer **anziehend** und lässt sich nicht abschirmen.

Für Kugeln (Planeten, Sterne) gilt das Gesetz so, als wäre die ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt – auch das hat Newton bewiesen.

Beispiel 2

Zwei Schüler mit je 70 kg sitzen 1 m voneinander entfernt: $F_G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{70 \cdot 70}{1^2}$ N $\approx 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ N. Das ist etwa die Gewichtskraft eines feinen Sandkorns – im Alltag merkt man von der Anziehung zwischen Gegenständen nichts. Erde ($5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg) und Mond ($7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg) im Abstand $3{,}844 \cdot 10^{8}$ m: $F_G \approx 2{,}0 \cdot 10^{20}$ N. Erst bei Himmelskörpern wird die Gravitation zur beherrschenden Kraft.

Typischer Fehler

Falsch: Die Erde zieht den Mond an, aber der Mond nicht die Erde – er ist ja viel kleiner.

Richtig: Erde und Mond ziehen einander mit **gleich großen** Kräften an. Die Erde wird dadurch nur viel weniger beschleunigt, weil ihre Masse 81-mal so groß ist.

Die Anziehung des Mondes auf die Erde spürt man trotzdem: Sie verursacht zusammen mit der Sonne Ebbe und Flut.

1.3 Die Erde wiegen

IMP 10 Wahlfach Astronomie

An der Erdoberfläche, im Abstand R_E vom Erdmittelpunkt, erfährt ein Körper der Masse m die Gewichtskraft $m \cdot g$. Sie ist nichts anderes als die Gravitationskraft der Erde:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{R_E^2} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{G \cdot M_E}{R_E^2}.$$

Die Masse m fällt heraus: Alle Körper fallen (ohne Luftwiderstand) gleich schnell. Umgekehrt kann man die Masse der Erde berechnen, sobald man G kennt:

$$M_E = \frac{g \cdot R_E^2}{G} = \frac{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}371 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \approx 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}\ .$$

Den Wert von G kann man nur im Labor bestimmen, und das ist schwierig, weil die Anziehung zwischen Laborkörpern winzig ist. Henry Cavendish gelang es 1798 mit einer **Drehwaage**: Zwei kleine Bleikugeln an einem dünnen Draht wurden von zwei großen Bleikugeln angezogen, und aus der winzigen Verdrillung des Drahts ließ sich die Kraft berechnen. Man sagt deshalb, Cavendish habe „die Erde gewogen“.

Beispiel 3

Mittlere Dichte der Erde:

$$\rho = \frac{M_E}{V} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6{,}371 \cdot 10^{6}\ \text{m})^3} \approx 5500\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5{,}5\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Gestein an der Oberfläche hat aber nur etwa 2,7 bis $3\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Im Inneren muss also viel dichteres Material liegen: Die Erde hat einen Kern aus Eisen und Nickel.

Mit derselben Formel erhält man die Fallbeschleunigung auf anderen Himmelskörpern:

Himmelskörper	Masse in kg	Radius in km	g in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Mond	$7{,}34 \cdot 10^{22}$	1737	1,62
Mars	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	3390	3,71
Erde	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	6371	9,81
Jupiter (Äquator, Wolkenobergrenze)	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	71 490	24,8
Sonne (Oberfläche)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	696 000	274

Tabelle 18: Fallbeschleunigung an der Oberfläche einiger Himmelskörper (gerundete Werte, mittlere Radien, beim Jupiter der Äquatorradius).

1.4 Gravitationsfeld und Schwerelosigkeit

IMP 10

Die Erde umgibt sich mit einem **Gravitationsfeld**: An jedem Ort im Raum wirkt auf einen Körper eine Kraft zum Erdmittelpunkt hin. Wie stark sie ist, gibt die Fallbeschleunigung an diesem Ort an, die **Gravitationsfeldstärke**

$$g(r) = \frac{G \cdot M_E}{r^2} = g_0 \cdot \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \quad \text{mit} \quad g_0 = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Sie nimmt mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt schnell ab, wird aber nirgends null.

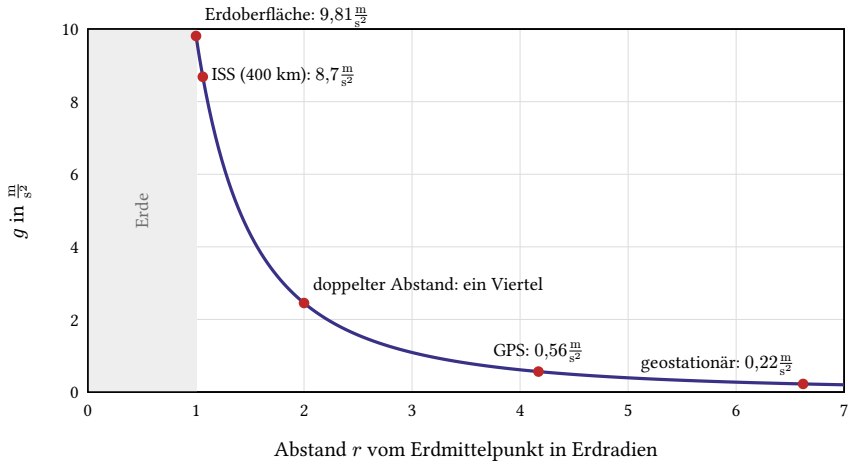


Abbildung 69: Fallbeschleunigung g über dem Abstand r vom Erdmittelpunkt (in Erdradien). In der Höhe der ISS ist g kaum kleiner als am Boden, bei der geostationären Bahn nur noch etwa ein Fünfzigstel.

In 400 km Höhe, wo die ISS fliegt, ist der Abstand vom Erdmittelpunkt nur 6 % größer als am Boden. Dort ist $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{6371}{6771}\right)^2 \approx 8{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ – fast neun Zehntel des Werts am Boden. Trotzdem schweben die Astronauten durch die Station. Der Grund: Die Station und alles in ihr **fallen gemeinsam** um die Erde herum. Weil alle Körper gleich schnell fallen, drückt nichts auf den Boden, und eine Waage zeigt null an. Das Gleiche erlebt man für einen Augenblick in einem Fallturm oder auf dem höchsten Punkt einer Achterbahn.

Definition

Schwerelosigkeit herrscht, wenn ein Körper sich nur unter dem Einfluss der Gravitation bewegt (**freier Fall**). Die Gravitationskraft wirkt weiter; es fehlt nur eine Unterlage, die dagegen drückt. Genauer spricht man von **Schwerelosigkeit im freien Fall**.

Typischer Fehler

Falsch: Im Weltraum gibt es keine Schwerkraft; deshalb schweben die Astronauten.

Richtig: In der Höhe der ISS ist die Gravitation noch fast so stark wie am Boden. Die Astronauten schweben, weil sie mit der Station gemeinsam frei fallen.

Gäbe es dort keine Gravitation, flöge die ISS geradeaus ins All davon.

Fachbegriffe: Gravitation · Gravitationsgesetz · Gravitationskonstante · Zentripetalbeschleunigung · Wechselwirkungsprinzip · Drehwaage · Fallbeschleunigung · mittlere Dichte · Gravitationsfeld · Gravitationsfeldstärke · Schwerelosigkeit · freier Fall

Üben: **noctua** ↗ Ausprobieren: **Gravitationsfeld** ↗



2 Erstes und zweites Keplersches Gesetz

2.1 Vom Kreis zur Ellipse

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Seit der Antike nahm man an, dass sich die Himmelskörper auf Kreisen bewegen, der vollkommensten aller Formen. Auch Nikolaus Kopernikus, der 1543 die Sonne in die Mitte stellte, hielt an Kreisbahnen fest (die Weltbilder von Ptolemäus bis Galilei stehen im Skript AS3). Seine Vorhersagen der Planetenorte waren deshalb kaum besser als die alten.

Der dänische Astronom Tycho Brahe vermaß in den Jahrzehnten vor 1600 die Positionen der Planeten so genau wie niemand vor ihm, ganz ohne Fernrohr, auf etwa eine bis zwei Bogenminuten genau. Nach seinem Tod wertete sein Mitarbeiter Johannes Kepler die Beobachtungen des Mars aus. Jahrelang versuchte er, sie mit Kreisbahnen zu erklären; die beste Kreisbahn wich aber an manchen Stellen um 8 Bogenminuten von Tychos Messungen ab. Kepler vertraute den Messungen mehr als dem alten Ideal – und fand schließlich die richtige Form: die **Ellipse**. 1609 veröffentlichte er in der „Astronomia nova“ seine ersten beiden Gesetze, 1619 das dritte (Kapitel 3).

Kepler beschrieb, **wie** sich die Planeten bewegen. **Warum** sie es tun, erklärte erst Newton mit dem Gravitationsgesetz: Er konnte zeigen, dass unter einer Kraft, die mit $\frac{1}{r^2}$ abnimmt, genau Keplers Bahnen entstehen.

2.2 Die Ellipse

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Einen Kreis zeichnet man mit einem Zirkel: Alle Punkte haben vom Mittelpunkt denselben Abstand. Eine Ellipse hat statt eines Mittelpunkts zwei besondere Punkte, die **Brennpunkte** F_1 und F_2.

Definition

Eine **Ellipse** ist die Menge aller Punkte P, für die die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (den Brennpunkten) gleich ist:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Daraus ergibt sich die **Gärtnerkonstruktion**, mit der Gärtner elliptische Beete abstecken: Man schlägt zwei Pflöcke in die Brennpunkte, bindet daran die Enden einer Schnur der Länge $2a$ und fährt mit einem Stab, der die Schnur straff hält, um die Pflöcke herum. Auf dem Papier geht das mit zwei Reißzwecken, einem Faden und einem Bleistift.

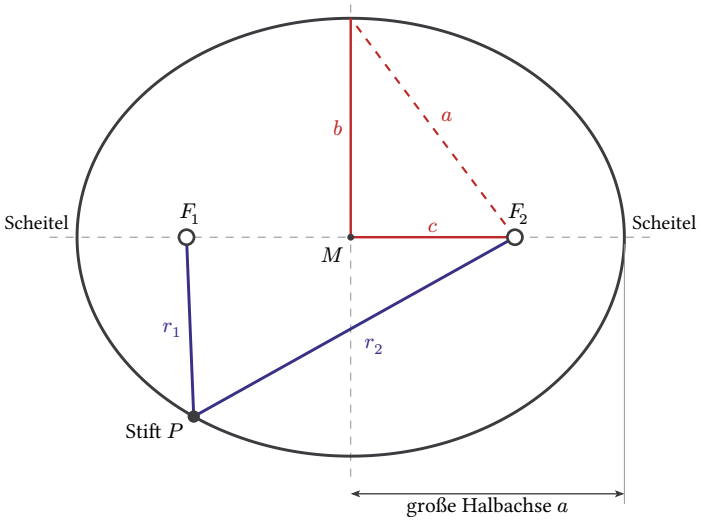


Abbildung 70: Gärtnerkonstruktion: Der Faden mit der Länge $r_1 + r_2 = 2a$ ist in den Brennpunkten befestigt. Rot: große Halbachse a, kleine Halbachse b und lineare Exzentrizität c bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

Merksatz

Größen an der Ellipse

- **große Halbachse** a: halbe Länge der Ellipse (vom Mittelpunkt M zum Scheitel);
- **kleine Halbachse** b: halbe Breite;
- **lineare Exzentrizität** c: Abstand eines Brennpunkts vom Mittelpunkt. Steht der Stift auf der kleinen Halbachse, sind beide Fadenstücke gleich lang ($r_1 = r_2 = a$); nach Pythagoras gilt $a^2 = b^2 + c^2$;
- **numerische Exzentrizität** $e = \frac{c}{a}$ mit $0 \le e < 1$: Sie misst, wie „flach“ die Ellipse ist. Für $e = 0$ fallen die Brennpunkte zusammen, die Ellipse ist ein Kreis.

Selbst ausprobieren

Stecke zwei Reißzwecken im Abstand von 6 cm in einen Karton, binde die Enden eines 10 cm langen Fadens an den beiden Reißzwecken fest und zeichne mit einem Bleistift, der den Faden straff hält, einmal ganz herum. Du erhältst eine Ellipse mit $a = 5$ cm, $c = 3$ cm, also $b = 4$ cm und $e = 0{,}6$. Rücke die Reißzwecken näher zusammen: Die Ellipse wird runder.

2.3 Das erste Keplersche Gesetz

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Merksatz

Erstes Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. In einem gemeinsamen Brennpunkt steht die Sonne.

Der andere Brennpunkt ist leer; dort befindet sich nichts Besonderes. Den sonnennächsten Punkt der Bahn nennt man **Perihel**, den sonnenfernsten **Aphel**. Ihre Abstände von der Sonne sind

$$r_P = a - c = a \cdot (1 - e) \quad \text{und} \quad r_A = a + c = a \cdot (1 + e).$$

Die große Halbachse ist also der Mittelwert aus kleinstem und größtem Abstand: $a = \frac{r_P + r_A}{2}$.

Das Gesetz gilt genauso für Monde um Planeten (dann steht der Planet im Brennpunkt) und für Satelliten um die Erde; Erdnächster und erdfernster Punkt heißen dann **Perigäum** und **Apogäum**.

Körper	a	e	Bemerkung
Venus	0,723 AE	0,007	fast ein Kreis
Erde	1,000 AE	0,017	Perihel 147,1 Mio. km (Anfang Januar), Aphel 152,1 Mio. km (Anfang Juli)
Mars	1,524 AE	0,093	an dieser Bahn fand Kepler die Ellipse
Merkur	0,387 AE	0,206	größte Exzentrizität unter den Planeten
Pluto (Zwergplanet)	39,5 AE	0,249	kommt im Perihel der Sonne näher als Neptun
Mond um die Erde	384 400 km	0,055	Perigäum etwa 363 300 km, Apogäum etwa 405 500 km
Komet Halley	17,8 AE	0,967	Perihel 0,59 AE, Aphel 35 AE

Tabelle 19: Große Halbachsen und Exzentrizitäten einiger Bahnen (gerundet).

Die meisten Planetenbahnen sind fast Kreise. Zeichnet man die Erdbahn mit $a = 10$ cm, so ist die kleine Halbachse nur $0{,}0014$ cm kürzer – weniger als die Strichstärke. Auffällig ist nur, dass die Sonne nicht in der Mitte steht: Der Brennpunkt liegt $c = 0{,}017 \cdot 10$ cm $= 1{,}7$ mm neben dem Mittelpunkt.

Ganz anders die **Kometen**. Viele von ihnen kommen aus den äußersten Bereichen des Sonnensystems und laufen auf langgestreckten Ellipsen. Der Halleysche Komet war zuletzt 1986 in Sonnennähe, das nächste Mal wird er 2061 wiederkommen.

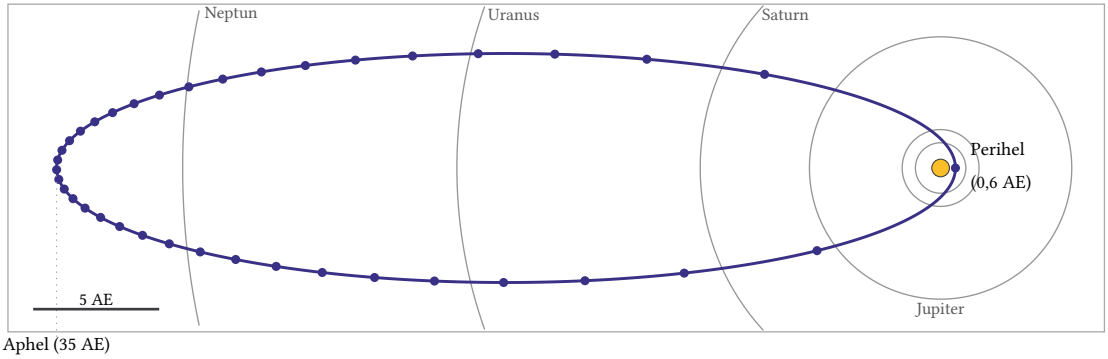


Abbildung 71: Bahn des Halleyschen Kometen (maßstäblich, in die Ebene der Planetenbahnen geklappt) mit den Bahnen von Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun (Ausschnitt). Die Punkte zeigen die Orte des Kometen im Abstand von zwei Jahren, berechnet mit dem zweiten Keplerschen Gesetz: In Sonnennähe ist er schnell, in Sonnenferne liegen die Punkte dicht.

Typischer Fehler

Falsch: Im Winter ist es kalt, weil die Erde dann am weitesten von der Sonne entfernt ist.

Richtig: Die Erde ist der Sonne Anfang Januar am **nächsten**. Die Jahreszeiten entstehen durch die Neigung der Erdachse (Skript AS2).

Der Abstand schwankt nur um gut 3 %. Wäre er die Ursache, hätten Nord- und Südhalbkugel gleichzeitig Winter.

2.4 Das zweite Keplersche Gesetz

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Auf einer Ellipse ändert sich der Abstand zur Sonne. Kepler fand heraus, dass sich dabei auch die Geschwindigkeit ändert, und zwar nach einer einfachen Regel:

Merksatz

Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz): Die Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

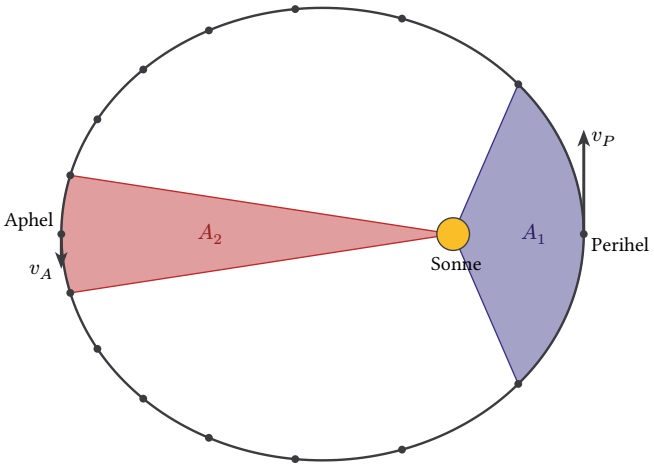


Abbildung 72: Flächensatz (Bahn mit $e = 0{,}5$): Die Punkte zeigen die Orte des Planeten nach jeweils gleichen Zeitspannen, berechnet aus der Keplergleichung. Die beiden Flächen A_1 und A_2 werden in gleicher Zeit überstrichen und sind gleich groß. Im Perihel ist der Planet schneller als im Aphel.

In der Nähe der Sonne ist die Verbindungslinie kurz; damit die überstrichene Fläche trotzdem gleich groß ist, muss der Planet ein längeres Bahnstück zurücklegen, also schneller sein. Weit draußen ist die Verbindungslinie lang, der Planet ist langsam.

Für Perihel und Aphel lässt sich das leicht ausrechnen. Dort steht die Geschwindigkeit senkrecht auf der Verbindungslinie, und in einer kurzen Zeit Δt überstreicht die Verbindungslinie ein schmales Dreieck mit der Grundseite $v \cdot \Delta t$ und der Höhe r. Gleiche Flächen bedeuten

$$\frac{1}{2} \cdot r_P \cdot v_P \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot r_A \cdot v_A \cdot \Delta t \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}.$$

Beispiel 4

Die Erde bewegt sich im Perihel mit $v_P = 30{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Im Aphel ist sie $v_A = 30{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{147{,}1}{152{,}1} \approx 29{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ schnell. Weil sie im Nordwinter schneller läuft, ist das Winterhalbjahr der Nordhalbkugel (von der Herbst- bis zur Frühlings-Tagundnachtgleiche) mit rund 179 Tagen gut eine Woche kürzer als das Sommerhalbjahr mit rund 186 Tagen.
Beim Halleyschen Kometen ist das Verhältnis viel größer: $\frac{v_P}{v_A} = \frac{35{,}1\ \text{AE}}{0{,}59\ \text{AE}} \approx 60$. Im Aphel kriecht er mit knapp $1\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ dahin, im Perihel rast er mit über $50\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ an der Sonne vorbei.

Newton konnte später zeigen, dass der Flächensatz für **jede** Kraft gilt, die zu einem festen Zentrum hin zeigt (eine **Zentralkraft**). Er ist eine Form des Drehimpulserhaltungssatzes, den man in der Kursstufe kennenlernt.

⋆ Die Sonne ist im Januar größer

Miss im Januar und im Juli den Durchmesser des Sonnenbilds, das ein Fernglas oder ein kleines Fernrohr auf einen weißen Karton im Schatten projiziert (gleicher Abstand, am besten um die Mittagszeit). Das Bild ist im Januar etwa 3 % größer: Der scheinbare Durchmesser der Sonne beträgt dann etwa 32,5 Bogenminuten, im Juli nur etwa 31,5. **Nie** durch das Gerät in die Sonne schauen und die Sonne nie ohne geprüften Sonnenfilter beobachten – es droht sofortige Erblindung. Bei der Projektion niemanden hinter das Okular treten lassen.

Fachbegriffe: Ellipse · Brennpunkt · Gärtnerkonstruktion · große Halbachse · kleine Halbachse · lineare Exzentrizität · numerische Exzentrizität · erstes Keplersches Gesetz · Perihel · Aphel · Perigäum · Apogäum · Kometenbahn · Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz) · Zentralkraft

Üben: **noctua ↗** Ausprobieren: **Keplersche Gesetze ↗** · **Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel ↗**



3 Drittes Keplersches Gesetz und Massenbestimmung

3.1 Das dritte Keplersche Gesetz

IMP 10 Wahlfach Astronomie

Je weiter ein Planet von der Sonne entfernt ist, desto länger braucht er für einen Umlauf: Merkur ein knappes Vierteljahr, Neptun 165 Jahre. Kepler suchte lange nach einem genauen Zusammenhang und fand ihn 1619:

Merksatz

Drittes Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a ihrer Bahnen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{konstant (für alle Planeten der Sonne)} .$$

Misst man T in Jahren und a in AE, ist die Konstante 1 (wegen der Erde): $T^2 = a^3$.

Planet	a in AE	T in Jahren	T^2	a^3
Merkur	0,387	0,241	0,0581	0,0580
Venus	0,723	0,615	0,378	0,378
Erde	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881	3,54	3,54
Jupiter	5,203	11,86	141	141
Saturn	9,537	29,46	868	867
Uranus	19,19	84,01	7058	7067
Neptun	30,07	164,8	27 160	27 190

Tabelle 20: Große Halbachsen und Umlaufzeiten der Planeten: T^2 und a^3 stimmen jeweils auf drei Stellen überein.

Über eine so große Spanne – die Halbachsen unterscheiden sich um fast das Hundertfache, die Umlaufzeiten um fast das Tausendfache – prüft man ein Potenzgesetz am besten im **doppelt-logarithmischen** Diagramm: Aus $T = a^{\frac{3}{2}}$ wird $\lg(T) = \frac{3}{2} \cdot \lg(a)$, eine Gerade mit der Steigung $\frac{3}{2}$.

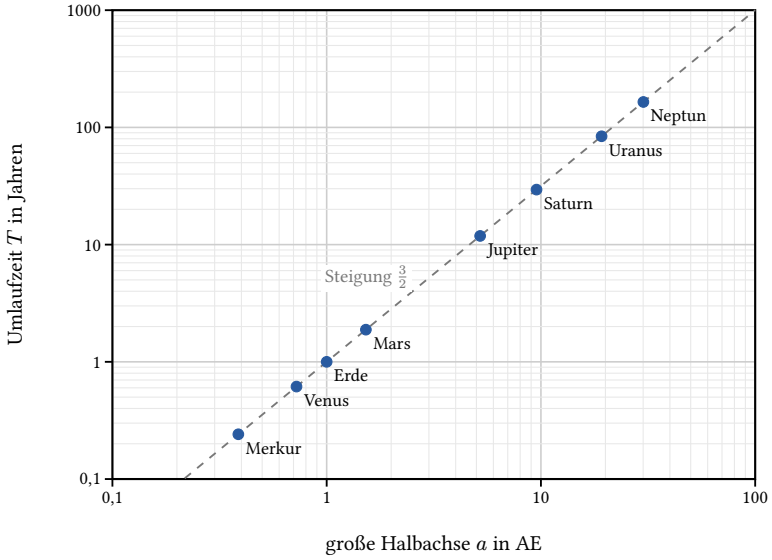


Abbildung 73: Drittes Keplersches Gesetz doppelt-logarithmisch: Alle Planeten liegen auf der Geraden $T = a^{\frac{3}{2}}$ mit der Steigung $\frac{3}{2}$.

Beispiel 5

Der Zwergplanet Ceres umläuft die Sonne im Asteroidengürtel mit $a = 2{,}77$ AE. Seine Umlaufzeit ist $T = \sqrt{2{,}77^3}$ a $= \sqrt{21{,}25}$ a $\approx 4{,}6$ a.

3.2 Newton begründet Kepler

IMP 10 | Wahlfach Astronomie

Mit dem Gravitationsgesetz lässt sich das dritte Keplersche Gesetz herleiten. Am einfachsten geht das für eine Kreisbahn (die Planetenbahnen sind ja fast Kreise): Ein Körper der Masse m umläuft einen Zentralkörper der Masse M auf einem Kreis mit dem Radius r in der Zeit T. Damit er auf der Kreisbahn bleibt, braucht er eine **Zentripetalkraft** zum Mittelpunkt hin. Diese Kraft liefert die Gravitation.

Mit der Bahngeschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T}$ gilt:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Kürzen durch m und Einsetzen von v:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{G \cdot M}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}.$$

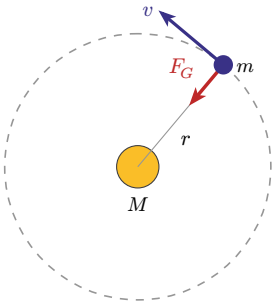


Abbildung 74: Die Gravitation wirkt als Zentripetalkraft.

Merksatz

Drittes Keplersches Gesetz nach Newton:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}.$$

- Die Masse m des umlaufenden Körpers fällt heraus: Für alle Körper um **denselben** Zentralkörper ist $\frac{T^2}{a^3}$ gleich.
- Die Konstante hängt nur von der Masse M des Zentralkörpers ab. Für die Monde des Jupiters ist sie eine andere als für die Planeten der Sonne.
- Für Ellipsenbahnen gilt dieselbe Formel mit der großen Halbachse a statt des Radius.

Genau genommen umkreisen beide Körper ihren gemeinsamen Schwerpunkt, und statt M steht $M + m$ in der Formel. Für Planeten um die Sonne macht das fast nichts aus; bei Doppelsternen, deren Partner ähnlich schwer sind, muss man es berücksichtigen (Skript AS8).

3.3 Massen von Himmelskörpern

IMP 10 | Wahlfach Astronomie

Das dritte Keplersche Gesetz ist die wichtigste Waage der Astronomie. Löst man nach M auf, erhält man die Masse des Zentralkörpers aus der Bahn eines Begleiters:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2}.$$

Man braucht nur die große Halbachse und die Umlaufzeit – beides lässt sich durch Beobachtung bestimmen.

Beispiel 6

Masse der Sonne aus der Erdbahn: $a = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}$, $T = 1\ \text{a} = 3{,}156 \cdot 10^{7}\ \text{s}$:

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot (3{,}156 \cdot 10^{7}\ \text{s})^2} \approx 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}\ .$$

Das ist 333 000-mal die Masse der Erde.

Zentralkörper	Begleiter	a	T	Masse M
Sonne	Erde	$1{,}496 \cdot 10^8$ km	365,25 d	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Jupiter	Mond Io	421 700 km	1,769 d	$1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg
Erde	Mond	384 400 km	27,32 d	$6{,}03 \cdot 10^{24}$ kg
Erde	ISS	6771 km	92,4 min	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg

Tabelle 21: Massenbestimmung mit dem dritten Keplerschen Gesetz. Beim Mond ergibt sich etwa 1 % zu viel: Der Mond ist im Vergleich zur Erde nicht leicht genug, um ihn zu vernachlässigen; die Rechnung liefert eigentlich die Summe beider Massen.

Bei der Erde gibt es also zwei unabhängige Wege zur Masse: über die Fallbeschleunigung g am Boden (Kapitel 1) und über die Bahn eines Mondes oder Satelliten. Beide liefern dasselbe – ein starker Hinweis, dass das Gravitationsgesetz stimmt.

Typischer Fehler

Falsch: Aus der Umlaufbahn des Mondes um die Erde kann man die Masse des Mondes berechnen.

Richtig: Die Bahn verrät nur die Masse des **Zentralkörpers**, hier der Erde. Die Masse des Begleiters fällt aus der Formel heraus.

Die Masse von Venus und Merkur, die keine Monde haben, kennt man deshalb erst genau, seit Raumsonden an ihnen vorbeiflogen oder sie umkreisten.

3.4 Das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße

IMP 10

Im Sternbild Schütze (lateinisch Sagittarius) liegt in rund 26 000 Lichtjahren Entfernung das Zentrum der Milchstraße. Im sichtbaren Licht ist es hinter dichten Staubwolken verborgen, aber Infrarotstrahlung dringt hindurch. Dort sitzt eine kompakte Quelle von Radiostrahlung, **Sagittarius A*** (kurz Sgr A*). Seit den 1990er-Jahren verfolgen zwei Forschergruppen um Reinhard Genzel (Garching) und Andrea Ghez (Los Angeles) mit den größten Teleskopen der Welt die Sterne in ihrer Umgebung. Sie laufen auf Keplerellipsen um einen unsichtbaren Punkt.

Der bekannteste ist der Stern **S2**. Er umrundet Sgr A* in etwa 16 Jahren auf einer langgestreckten Ellipse mit einer großen Halbachse von etwa 1030 AE.

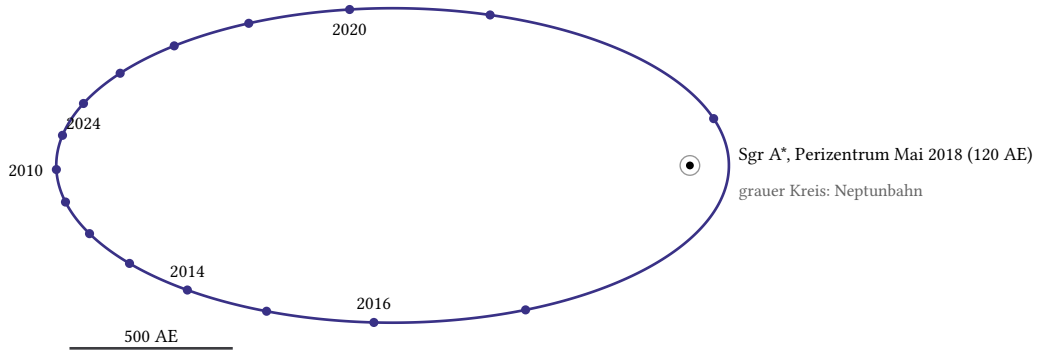


Abbildung 75: Bahn des Sterns S2 um Sgr A* in wahrer Gestalt, berechnet aus $a \approx 1030$ AE und $e \approx 0{,}88$. Die Punkte zeigen seine Orte jeweils zur Jahresmitte. Im Mai 2018 kam er Sgr A* bis auf etwa 120 AE nahe – nur viermal so weit, wie Neptun von der Sonne entfernt ist (grauer Kreis).

Für die Rechnung ist es bequem, wie bei den Planeten in Jahren, AE und Sonnenmassen zu rechnen. Teilt man $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ durch dieselbe Gleichung für die Erde um die Sonne ($T = 1$ a, $a = 1$ AE, $M = M_\odot$), fallen alle Konstanten weg:

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{(a \text{ in AE})^3}{(T \text{ in Jahren})^2}.$$

Beispiel 7

Masse von Sgr A*:

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{1030^3}{16{,}0^2} = \frac{1{,}09 \cdot 10^9}{256} \approx 4{,}3 \cdot 10^6.$$

Im Zentrum der Milchstraße sitzen also über vier Millionen Sonnenmassen.

Diese ungeheure Masse muss auf einen Raum konzentriert sein, der kleiner ist als die engste Annäherung von S2 – sonst wäre S2 durch die Masse hindurchgeflogen und hätte keine Keplerellipse beschrieben. Vier Millionen Sonnen auf einem Raum, der kleiner ist als unser Planetensystem, würden einander hell überstrahlen; man sieht dort aber nichts. Die einzige bekannte Erklärung ist ein **supermassereiches Schwarzes Loch** (wie Schwarze Löcher entstehen, zeigt das Skript AS9). Für diese Entdeckung erhielten Genzel und Ghez 2020 den Nobelpreis für Physik, zusammen mit Roger Penrose. 2022 veröffentlichte das Event Horizon Telescope, ein weltweites Netz von Radioteleskopen, ein Bild vom „Schatten“ des Schwarzen Lochs.

Mit 2,5 % der Lichtgeschwindigkeit

Im Perizentrum 2018 raste S2 mit etwa $7700\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ an Sgr A* vorbei, rund 2,5 % der Lichtgeschwindigkeit. Dabei konnte die Forschergruppe GRAVITY zwei Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie an S2 nachweisen: Sein Licht wurde im starken Schwerefeld zu größeren Wellenlängen verschoben, und seine Bahnellipse dreht sich bei jedem Umlauf ein wenig weiter.

Mit demselben Verfahren bestimmt man aus der Bewegung der Sterne und Gaswolken weiter draußen, wie viel Masse insgesamt innerhalb ihrer Bahn liegt. Dabei kommt mehr heraus, als man an Sternen und Gas sieht – ein Hinweis auf Dunkle Materie (Skript AS10).

Fachbegriffe: drittes Keplersches Gesetz · doppelt-logarithmisches Diagramm · Zentralkörper · Zentripetalkraft · Massenbestimmung · Sagittarius A* · Stern S2 · supermassereiches Schwarzes Loch

Üben: **noctua** ↗ Ausprobieren: **Keplersche Gesetze** ↗ · **Zentralkraft messen** ↗



4 Satelliten, geostationäre Bahn, Fluchtgeschwindigkeit

4.1 Vom Wurf zur Umlaufbahn

IMP 10 Zusatz

Newton stellte sich vor, auf einem sehr hohen Berg stünde eine Kanone, die Kugeln waagerecht abschießt. Je schneller die Kugel fliegt, desto weiter kommt sie, bevor sie auf dem Boden aufschlägt. Weil die Erde eine Kugel ist, krümmt sich der Boden unter der fallenden Kugel weg. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit fällt die Kugel genauso stark, wie sich die Erdoberfläche unter ihr wegkrümmt: Sie kommt nie mehr unten an und umrundet die Erde auf einer Kreisbahn. Aus dem Wurf ist eine **Umlaufbahn** geworden.

Wie schnell ist das? Ein Körper fällt in der ersten Sekunde 4,9 m. Die Erdoberfläche krümmt sich auf einer Strecke s um $h \approx \frac{s^2}{2R_E}$ nach unten; für $h = 4{,}9\ \text{m}$ ist $s = \sqrt{2 \cdot 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 4{,}9\ \text{m}} \approx 7900\ \text{m}$. Wer knapp über dem Boden (und ohne Luft) mit $7{,}9\frac{\text{km}}{\text{s}}$ waagerecht fliegt, fällt also genau um die Erde herum.

Allgemein liefert wieder die Gravitation die nötige Zentripetalkraft:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v_K = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Merksatz

Kreisbahngeschwindigkeit im Abstand r vom Mittelpunkt eines Himmelskörpers der Masse M:

$$v_K = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}\ , \quad \text{Umlaufzeit} \quad T = \frac{2\pi r}{v_K}.$$

Sie hängt nicht von der Masse des Satelliten ab. Dicht über der Erdoberfläche ist $v_K = 7{,}9\frac{\text{km}}{\text{s}}$; diese Geschwindigkeit heißt **erste kosmische Geschwindigkeit**.

Typischer Fehler

Falsch: Ein Satellit braucht einen Antrieb, sonst fällt er herunter.

Richtig: Auf seiner Bahn braucht ein Satellit keinen Antrieb: Er fällt ständig, aber um die Erde herum. Nur bei niedrigen Bahnen bremst ein Rest von Luft, sodass man ab und zu nachhelfen muss.

Die ISS wird deshalb alle paar Wochen bis Monate mit Triebwerken wieder angehoben.

4.2 Satellitenbahnen

IMP 10 Zusatz

Seit 1957 hat die Menschheit viele tausend **Satelliten** in Umlaufbahnen gebracht. Je nach Aufgabe fliegen sie in sehr verschiedenen Höhen. Für alle gilt: **Je höher die Bahn, desto langsamer der Satellit und desto länger die Umlaufzeit.** Das folgt aus $v_K = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ und dem dritten Keplerschen Gesetz.

Bahn	Höhe	Radius r	v_K	Umlaufzeit
ISS	rund 400 km	6771 km	$7{,}7\frac{\text{km}}{\text{s}}$	92 min
Erdbeobachtung	800 km	7171 km	$7{,}5\frac{\text{km}}{\text{s}}$	101 min
GPS	20 200 km	26 560 km	$3{,}9\frac{\text{km}}{\text{s}}$	11 h 58 min
geostationär	35 786 km	42 164 km	$3{,}1\frac{\text{km}}{\text{s}}$	23 h 56 min
Mond	–	384 400 km	$1{,}0\frac{\text{km}}{\text{s}}$	27,3 d

Tabelle 22: Kreisbahnen um die Erde ($GM_E = 3{,}986 \cdot 10^{14}\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$, Erdradius 6371 km).

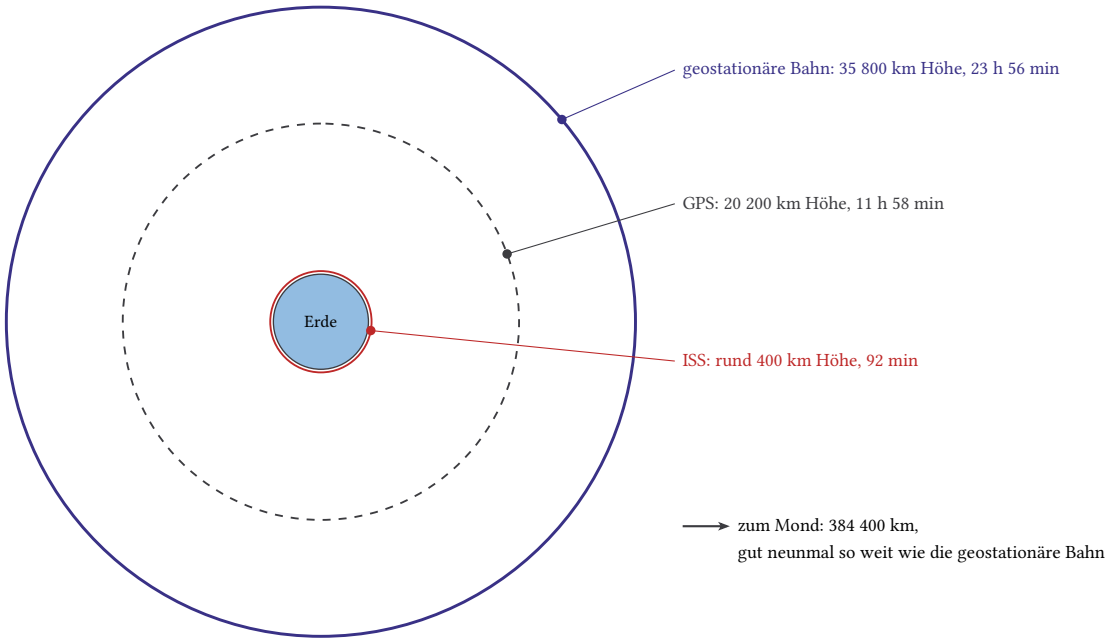


Abbildung 76: Bahnen der ISS, der Navigationssatelliten (GPS) und die geostationäre Bahn, maßstäblich um die Erde gezeichnet.

Niedrige Bahnen in einigen hundert Kilometern Höhe nutzen Raumstationen und Erdbeobachtungssatelliten, die scharfe Bilder der Erdoberfläche liefern sollen. Viele Erdbeobachtungssatelliten laufen auf **polaren Bahnen** über die Pole hinweg; während sich die Erde unter ihnen dreht, überfliegen sie nach und nach jeden Ort. Die Satelliten der Navigationssysteme GPS und Galileo fliegen in 20 000 bis 23 000 km Höhe; von jedem Punkt der Erde aus sind immer mehrere von ihnen gleichzeitig zu sehen.

⋆ Die ISS sehen
Die ISS ist nach Venus und Mond oft das hellste Objekt am Nachthimmel. Man sieht sie nur in der Dämmerung nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang: Dann ist es am Boden schon dunkel, die Station oben wird aber noch von der Sonne beschienen. Sie zieht als heller, nicht blinkender Punkt in wenigen Minuten über den Himmel, meist von West nach Ost, und verschwindet oft mitten am Himmel, wenn sie in den Erdschatten eintritt. Die Überflugzeiten für den eigenen Ort zeigen Astronomie-Apps. Ein Fernglas ist nicht nötig.

4.3 Die geostationäre Bahn

IMP 10

Eine Satellitenschüssel auf dem Dach ist fest ausgerichtet und wird nie nachgeführt. Der Fernsehsatellit muss also immer an derselben Stelle am Himmel stehen. Das geht, wenn er die Erde genau so schnell umläuft, wie sich die Erde dreht – dann „steht“ er für uns still. So eine Bahn heißt **geostationär**.

Die Erde dreht sich gegenüber den Sternen nicht in 24 Stunden, sondern in 23 h 56 min 4 s = 86 164 s einmal um sich selbst (**siderischer Tag** oder Sterntag; die 24 Stunden des Sonnentags sind etwas länger, weil die Erde inzwischen auf ihrer Bahn um die Sonne weitergewandert ist, Skript AS2). Außerdem muss der Satellit über dem Äquator in Drehrichtung der Erde kreisen; auf jeder anderen Bahn würde er abwechselnd nördlich und südlich des Äquators stehen.

Beispiel 8
Radius der geostationären Bahn. Aus $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_E}$ folgt

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_E \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{3{,}986 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2} \cdot (86\,164\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{7{,}496 \cdot 10^{22}\mathrm{m}^3} \approx 4{,}2164 \cdot 10^7\ \mathrm{m} = 42\,164\ \mathrm{km}\ .$$

Die Höhe über der Erdoberfläche ist $42\,164\ \mathrm{km} - 6371\ \mathrm{km} \approx 35\,800\ \mathrm{km}$, die Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T} \approx 3{,}07 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Merksatz

Geostationäre Bahn: Kreisbahn über dem Äquator mit der Umlaufzeit eines siderischen Tages, Radius 42 164 km, Höhe etwa 35 800 km. Ein Satellit auf dieser Bahn steht von der Erde aus gesehen immer an derselben Stelle des Himmels.

Die Idee stammt von dem Schriftsteller Arthur C. Clarke (1945). Heute kreisen Hunderte von Satelliten auf dieser Bahn: Fernseh- und Kommunikationssatelliten und Wettersatelliten wie die europäischen Meteosat-Satelliten, die immer dieselbe Erdhälfte im Blick haben. Von Deutschland aus stehen sie im Süden, je nach Ort etwa 28 bis 36 Grad über dem Horizont. Ein Nachteil ist die große Entfernung: Ein Funksignal braucht für den Weg hinauf und wieder herunter fast eine Viertelsekunde.

Typischer Fehler

Falsch: Ein geostationärer Satellit steht still im Weltraum, und man könnte ihn über Deutschland parken.

Richtig: Er bewegt sich mit gut $3\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ um die Erde – nur genau so schnell, wie sich die Erde dreht. Und er muss über dem Äquator kreisen, weil der Erdmittelpunkt im Mittelpunkt jeder Satellitenbahn liegt.

4.4 Fluchtgeschwindigkeit

IMP 10 Zusatz

Wirft man einen Stein nach oben, fällt er zurück. Je schneller man ihn wirft, desto höher steigt er. Gibt es eine Geschwindigkeit, mit der er nie mehr zurückkommt? Wäre die Gewichtskraft überall gleich groß, nein: Dann bräuchte man für jeden Meter Höhe dieselbe Arbeit, und für unendlich große Höhe unendlich viel Energie. Weil die Gravitation aber mit $\frac{1}{r^2}$ schwächer wird, reicht eine **endliche** Energie.

Um einen Körper der Masse m von der Oberfläche eines Himmelskörpers (Masse M, Radius R) ganz aus dessen Anziehung zu befreien, muss man die Arbeit

$$W = G \cdot \frac{M \cdot m}{R}$$

aufwenden. Reicht die Bewegungsenergie gerade dafür aus, gilt

$$\frac{1}{2} m v_F^2 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R} \quad \Longrightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Warum die Arbeit endlich ist

Man zerlegt den Weg nach außen in viele kurze Stücke von r_1 nach r_2, von r_2 nach r_3 und so weiter. Auf einem kurzen Stück ändert sich die Kraft kaum; nimmt man für sie den Wert $\frac{GMm}{r_1 r_2}$, der zwischen $\frac{GMm}{r_1^2}$ und $\frac{GMm}{r_2^2}$ liegt, so ist die Arbeit auf dem Stück

$$W_{12} = \frac{GMm}{r_1 r_2} \cdot (r_2 - r_1) = GMm \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Addiert man alle Stücke, heben sich die Zwischenglieder weg: Von R bis r ist $W = GMm \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$. Für sehr große r wird $\frac{1}{r}$ beliebig klein, und es bleibt $W = \frac{GMm}{R}$ – ein endlicher Wert. (In der Kursstufe rechnet man das mit der Integralrechnung genau nach.)

Merksatz

Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche eines Himmelskörpers (Masse M, Radius R):

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2} \cdot v_K.$$

Sie hängt nicht von der Masse des fliegenden Körpers ab. Für die Erde ist $v_F = 11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ (**zweite kosmische Geschwindigkeit**).

Himmelskörper	Masse in kg	Radius in km	v_F in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Mond	$7{,}34 \cdot 10^{22}$	1737	2,4
Mars	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	3390	5,0
Erde	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	6371	11,2
Jupiter	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	71 490	59,5
Sonne	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	696 000	618

Tabelle 23: Fluchtgeschwindigkeiten an der Oberfläche (beim Jupiter am Äquator der Wolkenobergrenze).

Die Fluchtgeschwindigkeit entscheidet auch darüber, ob ein Himmelskörper eine Lufthülle halten kann. Gasmoleküle bewegen sich ungeordnet mit Geschwindigkeiten von einigen hundert Metern pro Sekunde, einzelne deutlich schneller. Beim Mond mit seiner kleinen Fluchtgeschwindigkeit sind die Gase im Lauf der Zeit ins All entwichen; der Mond hat keine Atmosphäre.

Typischer Fehler

Falsch: Eine Rakete muss mit $11{,}2\frac{\text{km}}{\text{s}}$ starten, um die Erde zu verlassen.

Richtig: Die Fluchtgeschwindigkeit gilt für einen Körper, der **ohne Antrieb** fliegt. Eine Rakete beschleunigt über Minuten und gewinnt dabei laufend Energie; sie startet langsam.

Die nötige Energie ist aber dieselbe: Um 1 kg ganz von der Erde zu lösen, braucht man rund 63 MJ.

Michells „dunkle Sterne“

Schon 1783 fragte der englische Naturforscher John Michell: Was, wenn ein Stern so kompakt ist, dass seine Fluchtgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit c übersteigt? Dann könnte kein Licht von ihm entkommen. Setzt man $v_F = c$, folgt der Radius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, für die Sonne knapp 3 km. Er heißt heute **Schwarzschild-Radius**. Die einfache Rechnung mit Newtons Gesetz liefert zufällig dasselbe wie die Allgemeine Relativitätstheorie, die Schwarze Löcher richtig beschreibt (Skript AS9).

4.5 Bahnformen und kosmische Geschwindigkeiten

Zusatz

Was geschieht, wenn man Newtons Kanonenkugel mit anderen Geschwindigkeiten abschießt? Die Bahnen lassen sich aus dem Gravitationsgesetz berechnen; es sind immer **Kegelschnitte**, also Kurven, die man erhält, wenn man einen Kegel mit einer Ebene schneidet.

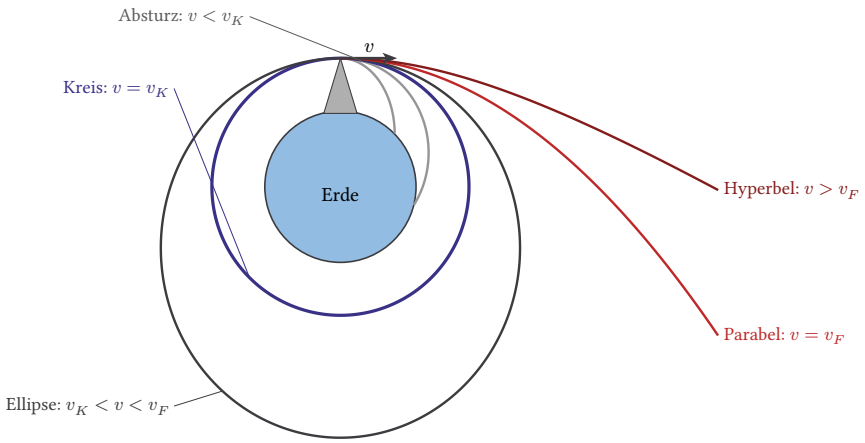


Abbildung 77: Bahnformen bei waagerechtem Abschuss in der Höhe r_0 (stark überhöht), berechnet aus dem Gravitationsgesetz. v_K: Kreisbahngeschwindigkeit, $v_F = \sqrt{2} \cdot v_K$: Fluchtgeschwindigkeit in dieser Höhe.

- $v < v_K$: Die Bahn ist eine Ellipse, deren erdnächster Punkt unter der Erdoberfläche läge; der Körper stürzt ab. Für kleine Geschwindigkeiten ist das die Wurfparabel.
- $v = v_K$: Kreisbahn.
- $v_K < v < v_F$: Ellipse; der Abschusspunkt ist das Perigäum.
- $v = v_F$: Parabel; der Körper entkommt gerade eben.
- $v > v_F$: Hyperbel; der Körper entkommt und behält weit draußen noch Geschwindigkeit übrig.

Name	Wert	Bedeutung
erste kosmische Geschwindigkeit	$7{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	Kreisbahn dicht über der Erdoberfläche
zweite kosmische Geschwindigkeit	$11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	Fluchtgeschwindigkeit der Erde
dritte kosmische Geschwindigkeit	$16{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	nötig, um vom Erdboden aus das Sonnensystem zu verlassen, wenn man die Bahngeschwindigkeit der Erde mitnutzt

Tabelle 24: Die kosmischen Geschwindigkeiten (ohne Luftwiderstand, Startpunkt Erdoberfläche).

Woher die 16,7 Kilometer pro Sekunde kommen

Im Abstand der Erdbahn ist die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Schwerefeld der Sonne $\sqrt{2}\cdot 29{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 42{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Die Erde bewegt sich schon mit $29{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$; startet man in ihrer Bewegungsrichtung, fehlen noch $12{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, die man nach dem Verlassen des Erdschwerefelds übrig haben muss. Dafür braucht man an der Erdoberfläche $\sqrt{12{,}3^2 + 11{,}2^2}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 16{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ – genauer gerechnet $16{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Fachbegriffe: Umlaufbahn · Kreisbahngeschwindigkeit · erste kosmische Geschwindigkeit · Satellit · polare Bahn · geostationäre Bahn · siderischer Tag · Fluchtgeschwindigkeit · zweite kosmische Geschwindigkeit · Schwarzschild-Radius · Kegelschnitt · Parabel · Hyperbel · dritte kosmische Geschwindigkeit

Üben: **noctua** ↗ Ausprobieren: **Vom Wurf zur Umlaufbahn** ↗ · **Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel** ↗ · **Fluchtgeschwindigkeit und Schwarzschild-Radius** ↗



5 Bahnen in kleinen Schritten berechnen

5.1 Warum kleine Schritte?

IMP 10

Für einen einzelnen Planeten um die Sonne oder einen Satelliten um die Erde liefern Kepler und Newton fertige Formeln. Schon wenig komplizierter wird es schwierig: Eine Rakete verliert beim Start laufend Masse, der Luftwiderstand hängt von der Geschwindigkeit ab, eine Mondsonde wird gleichzeitig von Erde und Mond angezogen. Für solche Bewegungen gibt es meist keine Formel, die man einfach ausrechnen könnte.

Hier hilft eine Idee, die so einfach ist, dass man sie zunächst kaum für brauchbar hält: Man zerlegt die Bewegung in viele **kleine Zeitschritte** Δt. Während eines kurzen Schritts ändern sich Kraft und Beschleunigung kaum; man darf sie als konstant ansehen. Dann kann man von einem Zeitpunkt zum nächsten rechnen – Schritt für Schritt, tausende Male. Das ist mühsam für Menschen und mühelos für Computer. Nach diesem Verfahren berechnen Raumfahrtagenturen die Bahnen ihrer Sonden, Wetterdienste das Wetter von morgen und Klimaforscher das Klima der Zukunft.

5.2 Das Rechenschema

IMP 10

Merksatz

Methode der kleinen Schritte (für jeden Zeitschritt Δt):

a) Aus dem Ort die Kraft F und die Beschleunigung $a = \frac{F}{m}$ berechnen.

b) Neue Geschwindigkeit: $v_{\text{neu}} = v + a \cdot \Delta t$.

c) Neuer Ort: $x_{\text{neu}} = x + v_{\text{neu}} \cdot \Delta t$.

d) Zeit weiterzählen: $t_{\text{neu}} = t + \Delta t$; dann wieder bei a) beginnen.

Das Verfahren geht auf Leonhard Euler zurück (**Euler-Verfahren**); weil hier in Schritt c) schon die neue Geschwindigkeit benutzt wird, spricht man genauer vom Euler-Cromer-Verfahren.

Ein Rechenschema, das immer wieder auf sein eigenes Ergebnis angewandt wird, nennt man **iterativ** (lateinisch iterare, wiederholen). Am einfachsten sieht man, wie es arbeitet, an einer Bewegung, deren Ergebnis man kennt: am freien Fall. Ein Stein fällt aus der Ruhe; die Beschleunigung ist immer $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mit $\Delta t = 0{,}5$ s:

t in s	v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Fallweg s in m (Schritte)	exakt $s = \frac{1}{2}gt^2$ in m
0	0	0	0
0,5	4,91	$0 + 4{,}91 \cdot 0{,}5 = 2{,}45$	1,23
1,0	9,81	$2{,}45 + 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 7{,}36$	4,91
1,5	14,72	$7{,}36 + 14{,}72 \cdot 0{,}5 = 14{,}72$	11,04
2,0	19,62	$14{,}72 + 19{,}62 \cdot 0{,}5 = 24{,}53$	19,62

Tabelle 25: Freier Fall in Schritten von 0,5 s. Die Geschwindigkeit stimmt, der Fallweg ist zu groß.

Der Fallweg kommt zu groß heraus, weil in jedem Schritt mit der Geschwindigkeit am **Ende** des Schritts gerechnet wird, obwohl der Stein zu Beginn des Schritts langsamer war. Der Fehler wird kleiner, wenn man die Schritte verkleinert: Mit $\Delta t = 0{,}25$ s ist er nach 2 s nur noch halb so groß, mit $\Delta t = 0{,}05$ s ein Zehntel. **Je kleiner der Zeitschritt, desto genauer das Ergebnis** – aber desto mehr Schritte muss man rechnen.

5.3 Eine Satellitenbahn von Hand

IMP 10

Bei einer Bahn in der Ebene braucht man zwei Koordinaten x und y und rechnet für beide getrennt. Die Erde sitzt im Ursprung. Die Beschleunigung hat den Betrag $\frac{GM}{r^2}$ und zeigt zum Erdmittelpunkt, also entgegen dem Ortsvektor $(x \mid y)$ der Länge r. Ihre Komponenten sind deshalb

$$a_x = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{GM \cdot x}{r^3}\,, \quad a_y = -\frac{GM \cdot y}{r^3}\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ein Satellit startet im Abstand 7000 km vom Erdmittelpunkt (also 629 km über dem Boden) mit $8{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ senkrecht zur Verbindungslinie, ein wenig schneller als für eine Kreisbahn nötig. Wir rechnen in Kilometern und Sekunden; dann ist $GM_E = 398\,600\,\frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$. Startwerte: $x = 7000$ km, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 8{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$; Zeitschritt $\Delta t = 60$ s.

t	x	y	r	$a_x \cdot \Delta t$	$a_y \cdot \Delta t$	v_x neu	v_y neu
0	7000,0	0,0	7000,0	−0,4881	0	−0,488	8,000
60	6970,7	480,0	6987,2	−0,4887	−0,0337	−0,977	7,966
120	6912,1	958,0	6978,2	−0,4865	−0,0674	−1,463	7,899
180	6824,3	1431,9	6972,9	−0,4814	−0,1010	−1,945	7,798
240	6707,6	1899,8	6971,5	−0,4735	−0,1341	−2,418	7,664
300	6562,5	2359,6	6973,9	…	…	…	…

Tabelle 26: Die ersten Schritte der Satellitenbahn (t in s; x, y, r in km; Geschwindigkeiten in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$). In jeder Zeile wird aus dem Ort die Geschwindigkeitsänderung $a \cdot \Delta t$ berechnet und zur alten Geschwindigkeit addiert; mit der neuen Geschwindigkeit folgt der Ort in der nächsten Zeile, zum Beispiel $x = 7000{,}0 + (-0{,}488) \cdot 60 = 6970{,}7$.

Schon nach diesen wenigen Schritten sieht man, wie die Bahn sich krümmt: v_x wird immer stärker negativ, der Satellit wird zur Erde hin abgelenkt. Dass r zunächst etwas kleiner wird als 7000 km, ist ein Fehler des Verfahrens: Eigentlich ist der Startpunkt der erdnächste Punkt der Bahn. Mit kleineren Schritten verschwindet dieser Fehler.

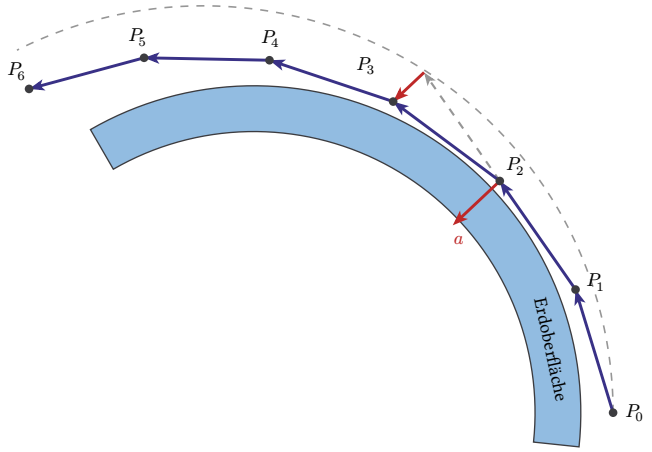


Abbildung 78: Die Methode der kleinen Schritte im Bild, mit groben Schritten von $\Delta t = 300$ s, damit man die Pfeile erkennt. Ohne Kraft liefe der Satellit von P_2 aus mit der alten Geschwindigkeit geradeaus weiter (grau gestrichelt). Die Gravitation (Beschleunigung a zum Erdmittelpunkt) ändert in diesem Schritt die Geschwindigkeit; dadurch wird der Weg um das rote Stück zur Erde hin abgelenkt, und der Satellit landet in P_3. Gestrichelt: die exakte Bahn.

5.4 Mit dem Computer: Schrittweite und Genauigkeit

IMP 10

Von Hand schafft man nur wenige Schritte. Für einen ganzen Umlauf braucht man mit $\Delta t = 60$ s schon 120 Schritte – eine Arbeit für den Computer. In einer **Tabellenkalkulation** steht jeder Zeitschritt in einer Zeile; die Formeln einer Zeile kopiert man einfach nach unten. Stehen der Ort in den Spalten B und C, der Abstand in D und die (neue) Geschwindigkeit in F und G, so lauten die Formeln für Zeile 3 zum Beispiel:

- Abstand: `D3 = WURZEL(B3^2 + C3^2)`
- Geschwindigkeit: `F3 = F2 - 398600*B3/D3^3*60` und `G3 = G2 - 398600*C3/D3^3*60`
- Ort: `B4 = B3 + F3*60` und `C4 = C3 + G3*60`

Ebenso kurz ist ein Programm, etwa in Python:

Die Satellitenbahn in Python

```
import math
GM, dt = 398600, 60          # GM in km^3 pro s^2, dt in s
x, y, vx, vy = 7000, 0, 0, 8 # Startort in km, Geschwindigkeit in km pro s
for schritt in range(120):   # 120 Schritte = 2 Stunden
    r = math.sqrt(x**2 + y**2)
    vx = vx - GM * x / r**3 * dt
    vy = vy - GM * y / r**3 * dt
    x = x + vx * dt
    y = y + vy * dt
    print(schritt * dt + dt, round(x, 1), round(y, 1))
```

Die Ortswerte trägt man in ein x-y-Diagramm ein und erhält die Bahn.

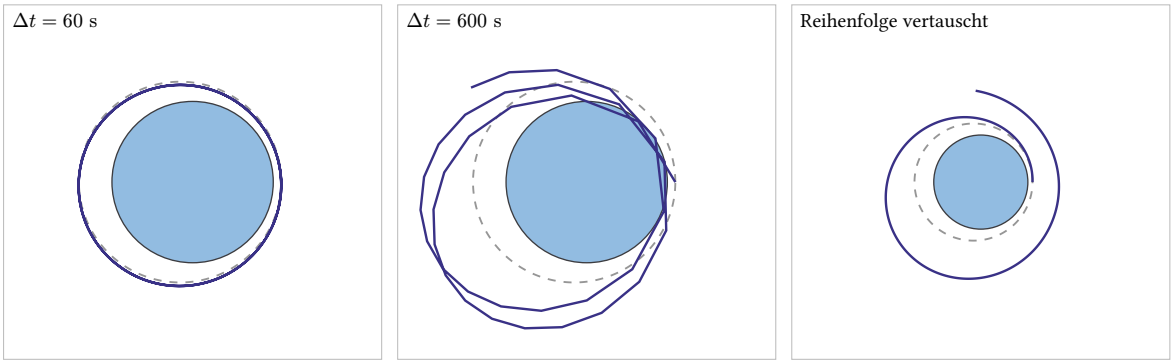


Abbildung 79: Ergebnisse der Rechnung für drei Umläufe (links und Mitte) bzw. zwei Umläufe (rechts), gestrichelt die exakte Ellipse. Links: Mit $\Delta t = 60$ s liegt die berechnete Bahn fast auf der exakten. Mitte: Mit $\Delta t = 600$ s wird die Bahn eckig, sie schließt sich nicht und läuft zeitweise sogar durch die Erde. Rechts: Wer zuerst den Ort mit der alten Geschwindigkeit und erst dann die Geschwindigkeit berechnet, erhält eine Spirale nach außen (anderer Maßstab).

Daraus lernt man dreierlei:

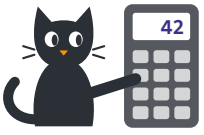
- **Die Schrittweite muss klein genug sein.** Wie klein, prüft man, indem man sie halbiert: Ändert sich das Ergebnis kaum noch, ist sie klein genug. Zu kleine Schritte kosten Rechenzeit, und weil in jedem Schritt gerundet wird, können sich bei sehr vielen Schritten auch Rundungsfehler aufsummieren.
- **Auf die Reihenfolge kommt es an.** Rechnet man den Ort mit der alten Geschwindigkeit aus, gewinnt der Satellit in jedem Schritt ein wenig Energie, und die Bahn spiralt nach außen. Das Euler-Cromer-Verfahren vermeidet das weitgehend.
- **Man muss das Ergebnis prüfen.** Eine geschlossene Bahn, die richtige Umlaufzeit (hier 7108 s, also knapp zwei Stunden, aus dem dritten Keplerschen Gesetz) und die Erhaltung der Energie sind gute Kontrollen. Wo es Messungen gibt, vergleicht man mit ihnen.

Typischer Fehler

Falsch: Was der Computer ausrechnet, stimmt.
Richtig: Der Computer rechnet nur das Modell durch, das man ihm vorgibt, und mit der gewählten Schrittweite. Ob das Ergebnis brauchbar ist, muss man selbst prüfen.

Fachbegriffe: Methode der kleinen Schritte · Zeitschritt · Euler-Verfahren · iterativ · numerischer Fehler · Tabellenkalkulation · Modell

Üben: **noctua** ↗ Ausprobieren: **Bahnen numerisch** ↗



6 Raketen und Geschichte der Raumfahrt

6.1 Das Rückstoßprinzip

Physik 9/10 IMP 10

Bläst man einen Luftballon auf und lässt ihn los, saust er durch das Zimmer: Die Luft strömt nach hinten heraus, der Ballon fliegt nach vorn. Wer auf einem Skateboard steht und einen schweren Ball nach vorn wirft, rollt nach hinten. Beides sind Beispiele für das **Rückstoßprinzip**.

Dahinter steckt die **Impulserhaltung**. Der **Impuls** eines Körpers ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, $p = m \cdot v$. In einem System, auf das von außen keine Kräfte wirken, bleibt der Gesamtimpuls erhalten. Ruht anfangs alles, ist der Gesamtimpuls null – und muss null bleiben. Stößt ein Körper eine Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 nach hinten aus, erhält er selbst einen gleich großen Impuls nach vorn:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 .$$

Eine Rakete arbeitet genauso. In der Brennkammer verbrennen Treibstoff und Oxidator (zum Beispiel Wasserstoff und Sauerstoff) zu heißem Gas, das mit hoher Geschwindigkeit durch die Düse nach hinten ausströmt. Die Rakete erhält dabei einen Impuls in die Gegenrichtung. Weil sie ihren Sauerstoff selbst mitbringt, funktioniert sie auch im luftleeren Raum – dort sogar besonders gut, weil keine Luft bremst.

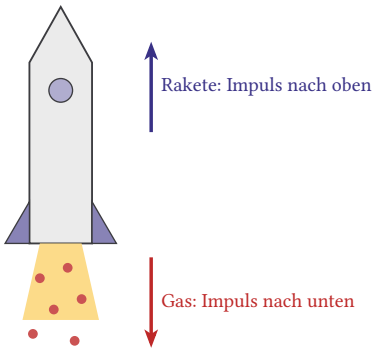


Abbildung 80: Rückstoß: Gas und Rakete erhalten entgegengesetzt gleich große Impulse.

Beispiel 9

Eine Schülerin (50 kg) steht auf einem Skateboard (2 kg) und wirft einen Medizinball (3 kg) mit $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach vorn. Sie rollt mit $v = \frac{3 \cdot 4}{52}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}23\frac{\text{m}}{\text{s}}$ rückwärts.

Typischer Fehler

Falsch: Eine Rakete stößt sich mit ihrem Abgasstrahl an der Luft oder am Boden ab.

Richtig: Die Rakete stößt sich an ihrem **eigenen Gas** ab: Was nach hinten fliegt, schiebt die Rakete nach vorn. Im Vakuum funktioniert das am besten.

Noch 1920 spottete eine große amerikanische Zeitung über den Raketenpionier Robert Goddard, eine Rakete könne im leeren Raum nicht fliegen, weil sie dort nichts habe, wogegen sie drücken könne. Sie entschuldigte sich dafür 1969, als Apollo 11 zum Mond flog.

6.2 Schub und Raketengleichung

IMP 10 Zusatz

Wie stark eine Rakete angetrieben wird, hängt davon ab, wie viel Gas pro Sekunde ausströmt (**Massenstrom** μ in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$) und wie schnell (**Ausströmgeschwindigkeit** w). In der Zeit Δt verlässt die Masse $\mu \cdot \Delta t$ die Düse und nimmt den Impuls $\mu \cdot \Delta t \cdot w$ mit. Die Rakete erhält den gleichen Impuls in Gegenrichtung; die Kraft ist Impulsänderung pro Zeit:

Merksatz

Schub einer Rakete: $F_S = \mu \cdot w$.

Damit die Rakete abheben kann, muss der Schub größer sein als ihre Gewichtskraft: $F_S > m \cdot g$.

Gute Triebwerke erreichen Ausströmgeschwindigkeiten von etwa $3\frac{\text{km}}{\text{s}}$ (Kerosin und Sauerstoff) bis gut $4\frac{\text{km}}{\text{s}}$ (Wasserstoff und Sauerstoff). Die Mondrakete Saturn V wog beim Start fast 3000 Tonnen; die fünf Triebwerke der ersten Stufe lieferten zusammen einen Schub von rund 34 MN und verbrannten dabei in zweieinhalb Minuten über 2000 Tonnen Treibstoff.

Während des Flugs wird die Rakete immer leichter, und derselbe Schub beschleunigt sie immer stärker. Wie schnell sie am Ende ist, hat der russische Lehrer Konstantin Ziolkowski schon 1903 berechnet:

Merksatz

Raketengleichung (Ziolkowski; ohne Schwerkraft und Luftwiderstand): Eine Rakete mit der Startmasse m_0, die ihren Treibstoff bis zur Endmasse m_1 verbrennt, gewinnt die Geschwindigkeit

$$\Delta v = w \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right).$$

Die Herleitung braucht die Integralrechnung; mit der Methode der kleinen Schritte kann man das Ergebnis aber nachrechnen (nächster Abschnitt). Zwei Folgerungen sind wichtig:

- Die Endgeschwindigkeit kann größer sein als die Ausströmgeschwindigkeit, wenn nur genug Treibstoff an Bord ist.
- Der Logarithmus wächst aber sehr langsam. Für $\Delta v = w$ muss die Rakete zu 63 % aus Treibstoff bestehen, für $\Delta v = 2w$ schon zu 86 %, für $\Delta v = 3w$ zu 95 %.

Für eine Umlaufbahn braucht man $7{,}9\frac{\text{km}}{\text{s}}$ und dazu noch etwa 1,5 bis $2\frac{\text{km}}{\text{s}}$, die durch Schwerkraft und Luftwiderstand während des Aufstiegs verloren gehen – zusammen rund $9{,}5\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Selbst mit $w = 4{,}4\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ergibt sich $\frac{m_0}{m_1} = e^{\frac{9{,}5}{4{,}4}} \approx 8{,}7$: Fast 90 % der Startmasse müssten Treibstoff sein, und Tanks, Triebwerke und Nutzlast zusammen nur gut 10 %. Das schafft keine Rakete in einem Stück. Deshalb baut man **Stufenraketen**: Ist der Treibstoff der ersten Stufe verbraucht, wird sie mit ihren leeren Tanks und schweren Triebwerken abgeworfen, und die leichtere zweite Stufe beschleunigt weiter.

Schwung holen beim Planeten: Swing-by

Um Raumsonden zu den äußeren Planeten zu schicken, reicht der Treibstoff kaum. Man lässt sie deshalb dicht an einem Planeten vorbeifliegen. Im Bezugssystem des Planeten ist das ein Hyperbelflug: Die Sonde kommt mit derselben Geschwindigkeit wieder heraus, nur in eine andere Richtung. Weil sich der Planet aber selbst um die Sonne bewegt, kann die Sonde gegenüber der Sonne dabei kräftig Geschwindigkeit gewinnen (**Swing-by** oder Gravitationsumlenkung). Voyager 2 besuchte so nacheinander Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.

6.3 Raketenstart in kleinen Schritten

IMP 10

Eine Rakete, die senkrecht startet, ist ein gutes Beispiel für die Methode der kleinen Schritte, denn ihre Masse ändert sich ständig. Wir rechnen mit einer Modellrakete: Startmasse $m_0 = 100$ t, davon 80 t Treibstoff, Massenstrom $\mu = 400\frac{\text{kg}}{\text{s}}$, Ausströmgeschwindigkeit $w = 3000\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Schub ist $F_S = 400\frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 3000\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}2$ MN, die Brenndauer 80 000 kg : $400\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 200$ s. Luftwiderstand und die Abnahme von g mit der Höhe lassen wir weg.

In jedem Schritt ist die Beschleunigung

$$a = \frac{F_S - m \cdot g}{m},$$

danach wird die Geschwindigkeit erhöht ($v_{\text{neu}} = v + a \cdot \Delta t$) und die Masse verringert ($m_{\text{neu}} = m - \mu \cdot \Delta t$).

t in s	m in kg	a in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
0	100 000	2,19	0
10	96 000	2,69	21,9
20	92 000	3,23	48,8
30	88 000	3,83	81,1
40	84 000	4,48	119,4

Tabelle 27: Raketenstart in Schritten von $\Delta t = 10$ s. Beispiel für die zweite Zeile: $a = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\ \text{N} - 96\,000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{96\,000\ \text{kg}} \approx 2{,}69\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v = 0 + 2{,}19\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{s} = 21{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

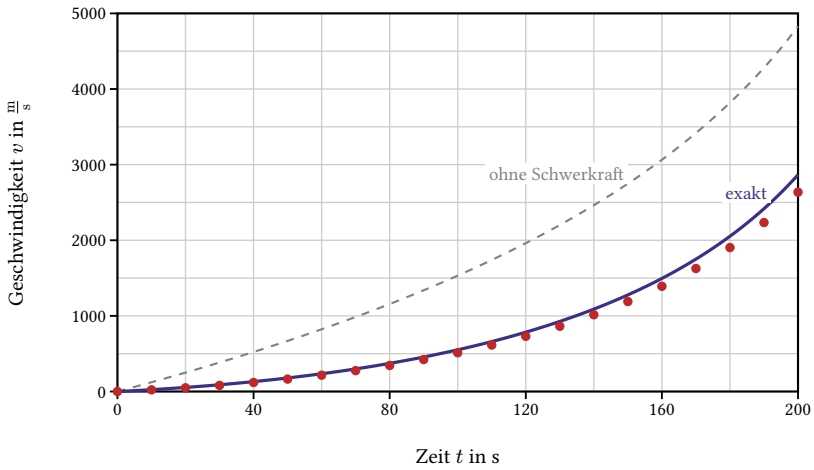


Abbildung 81: Geschwindigkeit der Modellrakete bis zum Brennschluss. Punkte: Methode der kleinen Schritte mit $\Delta t = 10$ s. Durchgezogen: exakte Lösung $v = w \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - g \cdot t$. Gestrichelt: dieselbe Rakete ohne Schwerkraft (Raketengleichung).

Beim Brennschluss nach 200 s liefert die Rechnung mit $\Delta t = 10$ s etwa $2640\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mit $\Delta t = 1$ s schon $2840\frac{\text{m}}{\text{s}}$; der exakte Wert ist $3000\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \ln(5) - 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 200\ \text{s} \approx 2870\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Rechnung mit großen Schritten liegt zu tief, weil sie in jedem Schritt die Beschleunigung vom Anfang des Schritts verwendet, die Rakete aber immer leichter und damit stärker beschleunigt wird. Ohne Schwerkraft wäre die Rakete nach der Raketengleichung $3000\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \ln(5) \approx 4830\frac{\text{m}}{\text{s}}$ schnell; die Differenz von fast $2000\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist der Preis dafür, dass die Rakete 200 s lang gegen die Schwerkraft ankämpfen muss. Deshalb starten echte Raketen mit möglichst großer Beschleunigung und neigen sich bald zur Seite.

6.4 Geschichte der Raumfahrt

Zusatz Wahlfach Astronomie

Die Idee, mit Raketen ins All zu fliegen, ist gut hundert Jahre alt. Konstantin Ziolkowski in Russland, Hermann Oberth in Deutschland („Die Rakete zu den Planetenräumen“, 1923) und Robert Goddard in den USA, der 1926 die erste Flüssigkeitsrakete startete, legten die Grundlagen. Die erste Rakete, die den Weltraum erreichte, war 1944 die deutsche **A4** („V2“), eine Waffe, die gegen Städte in England und Belgien eingesetzt wurde. Gebaut wurde sie in unterirdischen Anlagen von KZ-Häftlingen unter mörderischen Bedingungen; bei ihrer Herstellung kamen mehr Menschen ums Leben als durch ihren Einsatz. Nach dem Krieg holten die USA und die Sowjetunion deutsche Ingenieure und Raketen ins Land, darunter Wernher von Braun.

Im **Kalten Krieg** wurde der Weltraum zum Schauplatz des Wettlaufs der beiden Großmächte. Am 4. Oktober 1957 startete die Sowjetunion **Sputnik 1**, den ersten künstlichen Satelliten: eine Kugel mit 58 cm Durchmesser und 84 kg Masse, die gut 96 Minuten für einen Umlauf brauchte und piepende Funksignale sendete. Im Westen löste das den „Sputnik-Schock“ aus. Am 12. April 1961 umrundete **Juri Gagarin** als erster Mensch die Erde, in 108 Minuten. Die USA antworteten mit dem Apollo-Programm, und am 20. Juli 1969 landete **Apollo 11** mit Neil Armstrong und Buzz Aldrin auf dem Mond, während Michael Collins im Mondorbit wartete. Bis 1972 betraten zwölf Menschen den Mond.

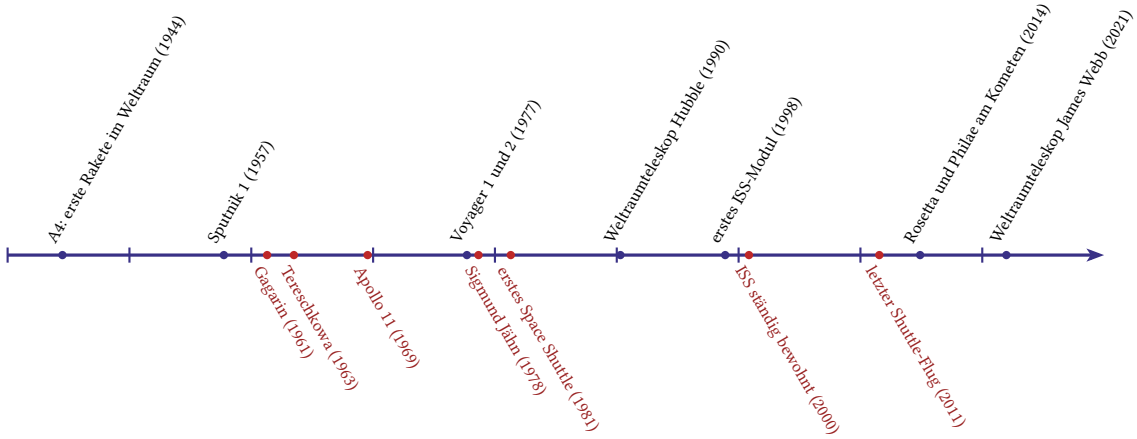


Abbildung 82: Etappen der Raumfahrt. Oben: unbemannte Flüge (blau), unten: Flüge mit Menschen an Bord (rot).

Jahr	Ereignis
1903	Ziolkowski veröffentlicht die Raketengleichung.
1926	Goddard startet die erste Rakete mit flüssigem Treibstoff.
1944	Die A4 erreicht als erste Rakete den Weltraum (über 100 km Höhe).
1957	Sputnik 1 (4. Oktober), der erste Satellit; im November mit Sputnik 2 die Hündin Laika als erstes Lebewesen im Orbit.
1961	Juri Gagarin (Sowjetunion) umrundet als erster Mensch die Erde (12. April).
1963	Walentina Tereschkowa fliegt als erste Frau ins All.
1965	Alexei Leonow steigt als erster Mensch aus seinem Raumschiff aus.
1969	Apollo 11: erste Mondlandung (20. Juli); bis 1972 zwölf Menschen auf dem Mond.
1977	Start der Raumsonden Voyager 1 und 2; Voyager 1 ist heute das am weitesten entfernte von Menschen gebaute Objekt.
1978	Sigmund Jähn (DDR) fliegt als erster Deutscher ins All; 1983 folgt Ulf Merbold (Bundesrepublik).
1981–2011	Die Raumfähren (Space Shuttles) der USA fliegen 135-mal.
1990	Start des Weltraumteleskops Hubble.
1998/2000	Das erste Modul der Internationalen Raumstation ISS startet (20. November 1998); seit dem 2. November 2000 ist sie ständig bewohnt.
2014	Die europäische Sonde Rosetta erreicht einen Kometen und setzt den Lander Philae ab.
2021	Start des Weltraumteleskops James Webb (25. Dezember).

Tabelle 28: Wichtige Etappen der Raumfahrt (Raumsonden zu den Planeten: Skript AS3).

Die **Internationale Raumstation** ist das größte Bauwerk, das Menschen je ins All gebracht haben: rund 420 Tonnen schwer, so groß wie ein Fußballfeld, gemeinsam betrieben von den Raumfahrtagenturen der USA, Russlands, Europas, Japans und Kanadas. Sie umrundet die Erde etwa 16-mal am Tag. Seit einigen Jahren bringen auch private Unternehmen Menschen und Fracht ins All, und erste Raketenstufen landen nach dem Start wieder und werden erneut verwendet; China betreibt eine eigene Raumstation.

6.5 Nutzen und Probleme der Raumfahrt

Zusatz Wahlfach Astronomie

Ohne Raumfahrt wäre unser Alltag ein anderer: Navigationssatelliten (GPS, Galileo) zeigen jedem Smartphone seinen Ort, Wettersatelliten verbessern die Vorhersagen, Kommunikationssatelliten übertragen Fernsehen und Internet, Erdbeobachtungssatelliten vermessen das Abschmelzen des Eises, den Anstieg des Meeresspiegels und die Abholzung der Wälder. Weltraumteleskope blicken ohne störende Lufthülle ins All, Raumsonden haben alle Planeten besucht.

Dem stehen Probleme gegenüber:

- **Kosten:** Raumfahrt ist teuer; über ihren Sinn wird gestritten, vor allem bei bemannten Flügen.
- **Weltraumschrott:** Ausgediente Satelliten, Raketenstufen und Trümmer kreisen um die Erde; nach Schätzungen der europäischen Raumfahrtagentur ESA sind es über eine Million Teile, die größer als ein Zentimeter sind. Wegen der hohen Geschwindigkeiten kann schon ein Teilchen von einem Zentimeter einen Satelliten zerstören. Jeder Zusammenstoß erzeugt neue Trümmer; im schlimmsten Fall droht eine Kettenreaktion, die manche Bahnen unbrauchbar macht.
- **Gesundheit:** Bei langen Aufenthalten in Schwerelosigkeit bauen Muskeln und Knochen ab; dazu kommt die Belastung durch die kosmische Strahlung.
- **Umwelt:** Raketenstarts belasten die Atmosphäre, und immer mehr Satelliten hellen den Nachthimmel auf und stören astronomische Beobachtungen.

Fachbegriffe: Rückstoßprinzip · Impuls · Impulserhaltung · Schub · Massenstrom · Ausströmgeschwindigkeit · Raketengleichung · Stufenrakete · Swing-by · Sputnik 1 · Internationale Raumstation · Weltraumschrott

Üben: **noctua** ↗ Ausprobieren: **Rückstoß: Federwagen und Rakete** ↗