minærva

ML 1

SKRIPT

Analysis

Erklärskript

Die Aufgaben 1–3 zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Verweise auf Aufgaben sind Links.

Mathematik-LK – Abitur 2027 · Skript 1 von 3

Pirmin Gohn

Nutzungshinweis: Dieses Skript darf nur im Rahmen des Unterrichts und der Abiturvorbereitung verwendet werden; insbesondere ist die eigenständige Weitergabe untersagt.

Skriptreihe ML · Mathematik-Leistungsfach zum Abitur 2027 · Baden-Württemberg · Bildungsplan 2016

ML1 Analysis · Teil B I
ML2 Analytische Geometrie · Teil B II
ML3 Stochastik · Teil B III
ML-K Kompakt

Lernen mit minærva

Dieses Skript ist ein Teil von minærva. Alles gehört zusammen: Jedes Thema führt von der Erklärung zum Üben, zum Ausprobieren und ins große Bild.

minaerva.de

Skripte Verstehen
Der Stoff zum Nachlesen: Erklärungen, Herleitungen, Beispiele und typische Fehler.
minaerva.de

noctua Üben
Fragen und Aufgaben zu jedem Abschnitt, Formeltraining und Aufgaben im Stil des Abiturs, mit sofortiger Rückmeldung.
noctua.minaerva.de

fabrica Ausprobieren
Versuche und Anschauungen zum Selbermessen und Anfassen, ohne Konto, auch auf dem iPad.
fabrica.minaerva.de

tela Vernetzen
Das Wissensnetz: worauf ein Thema aufbaut und wohin es führt.
tela.minaerva.de

So greifen die Skripte ineinander

Erklärskripte	Physik PL1–PL5, das Lernskript PL-Σ und Mathe ML1–ML3 enthalten den Stoff, aber keine Aufgaben.
Aufgabenskripte	Je Fach eines mit den Übungsaufgaben. Die Erklärskripte verweisen darauf; jede Aufgaben-, Abbildungs- und Tabellennummer gibt es je Fach nur einmal.
Abi-ähnlich	Je Fach eine Sammlung mit Aufgaben, wie sie im Abitur vorkommen könnten.
Lösungsskripte	Zu den Aufgabenskripten und zu den Abi-ähnlichen Aufgaben, jeweils je Fach.
Kompakt	Formeln und Abbildungen zum schnellen Wiederholen: PL-K für Physik, ML-K für Mathe, dazu die Formelsammlung.

Am Ende vieler Abschnitte stehen Links zur passenden Übung, zum Versuch und ins Wissensnetz. In der PDF-Datei lassen sie sich direkt antippen.

Inhaltsverzeichnis

Das Abitur 2027 ..... **5**
Ablauf 5
Was geprüft wird 5
Die Marken im Skript 6
Operatoren 6
1 Grundlagen **7**
1.1 Zahlenmengen 7
1.2 Bruchrechnen 7
1.3 Rechengesetze und binomische Formeln 8
1.4 Potenzen und Wurzeln 9
1.5 Logarithmen 10
2 Gleichungen **12**
2.1 Umformen 12
2.2 Satz vom Nullprodukt 12
2.3 Quadratische Gleichungen 13
2.4 Substitution 14
2.5 Exponentialgleichungen 15
2.6 Bruchgleichungen 16
2.7 Trigonometrische Gleichungen 16
2.8 Näherungsverfahren: Newton nicht im Abi 2027 18
3 Funktionen **19**
3.1 Grundbegriffe 19
3.2 Lineare Funktionen 19
3.3 Ganzrationale Funktionen 20
3.4 Wurzelfunktion 21
3.5 Exponential- und Logarithmusfunktion 22
3.6 Trigonometrische Funktionen 23
3.7 Gebrochenrationale Funktionen 24
3.8 Umkehrfunktion 25
3.9 Verkettung 26
3.10 Graphen verschieben, strecken, spiegeln 27
3.11 Symmetrie 27
3.12 Funktionenscharen 28
4 Differential- und Integralrechnung **30**
4.1 Die Ableitung 30
4.2 Ableitungsregeln 31
4.3 Stammfunktionen 34
4.4 Das bestimmte Integral 35
4.5 Integralfunktion 37
4.6 Der Hauptsatz und sein Beweis 38
4.7 Vom Graphen von f zum Graphen von F 39
4.8 Flächenberechnung 39
4.9 Rotationskörper 41
4.10 Bestand und Änderungsrate 41
4.11 Mittelwert und uneigentliche Integrale nicht im Abi 2027 42
5 Kurven untersuchen **43**
5.1 Definitionsbereich und Achsenschnittpunkte 43
5.2 Grenzverhalten und Asymptoten 43
5.3 Stetigkeit und Zwischenwertsatz 44
5.4 Monotonie 44
5.5 Extrempunkte 45
5.6 Wendepunkte und Krümmung 47

5.7 Funktion und Ableitungen 48
5.8 Tangente und Normale 48
5.9 Funktionsterm aus Eigenschaften 49
5.10 Extremwertprobleme 50
5.11 Funktionenscharen untersuchen 51
6 Wachstum 53
6.1 Lineares Wachstum 53
6.2 Exponentielles Wachstum 53
6.3 Beschränktes Wachstum 54

Das Abitur 2027

Die Skriptreihe zum Abitur 2027

Drei Skripte decken zusammen den Stoff des Leistungsfachs ab, jedes passend zu einem Sachgebiet von Teil B; die Aufgaben von Teil A stammen aus allen drei. Jedes Skript erklärt ausführlich, beweist die wichtigen Sätze, wo das mit Schulmitteln geht. Die Aufgaben stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Für die letzten Wochen fasst das Kompaktskript ML-K alle Formeln und Abbildungen auf wenigen Seiten zusammen.

	Skript	Bildungsplan 2016, Leistungsfach
ML1	**Analysis**	3.4.4 Funktionaler Zusammenhang, 3.4.2 Messen (Integral); Rechenwerkzeuge aus 3.4.1
ML2	**Analytische Geometrie**	3.4.3 Raum und Form; lineare Gleichungssysteme aus 3.4.1
ML3	**Stochastik**	3.4.5 Daten und Zufall
ML-K	**Kompakt**	alle Formeln, Verfahren und Abbildungen, ohne Erklärungen und Aufgaben

Ablauf

Definition

300 Minuten, Hauptprüfung am 5. Mai 2027.

Teil A – ohne Hilfsmittel: alle vier Pflichtaufgaben P1 bis P4 und zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6, je 5 BE. Abgabe spätestens **110 Minuten** nach Beginn.

Teil B – mit Hilfsmitteln: je eine Aufgabe zu Analysis (I), Analytischer Geometrie (II) und Stochastik (III); die Lehrkraft wählt aus je zwei Vorschlägen aus.

Merksatz

Hilfsmittel in Teil B:

- die mathematisch-naturwissenschaftliche **Formelsammlung des IQB**,
- ein **wissenschaftlicher Taschenrechner** (WTR).

Geodreieck und Zirkel sind in der ganzen Prüfung erlaubt.

Wichtig

Der WTR kann **keine** Gleichungen lösen, **nicht** ableiten oder integrieren und keine Graphen zeichnen. Er kann: Wertetabellen, $n!$, $\binom{n}{k}$, Mittelwert und Standardabweichung, einzelne und **kumulierte** Wahrscheinlichkeiten der Binomial- und der Normalverteilung.

Auch in Teil B wird also von Hand gerechnet.

Was geprüft wird

Merksatz

Bildungsplan 2016, Leistungsfach. Zusätzlich vorausgesetzt: **Umkehrfunktionen** sowie **Varianz** und **Standardabweichung** diskreter Zufallsgrößen.

Wichtig

Nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027:

- Mittelwert einer Funktion mit der Integralrechnung,
- uneigentliche Integrale,
- Näherungsverfahren (z. B. Newton),
- Beweise mit Vektoren.

Im Skript stehen sie mit der Marke nicht im Abi 2027.

Die Marken im Skript

FS	steht in der IQB-Formelsammlung – aber nur in **Teil B** verfügbar
nicht im Abi 2027	nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027
Zusatz	hilfreich, geht aber über den Bildungsplan hinaus

Beweise und Begründungen sind mit einem farbigen Strich am Rand abgesetzt. Sie werden im Abitur selten wörtlich verlangt – aber wer weiß, **warum** eine Regel gilt, wendet sie sicherer an und kann sie notfalls selbst wieder herleiten.

Operatoren

angeben, nennen	ohne Begründung, ohne Rechenweg
berechnen	Rechenweg darstellen
bestimmen, ermitteln	Weg frei wählbar, Lösungsweg zeigen
zeigen, nachweisen	Aussage mit gültigen Schlüssen bestätigen
begründen	Sachverhalt auf Regeln zurückführen
beurteilen	zu einem Urteil kommen und es begründen
untersuchen	Eigenschaften herausfinden, Weg frei
skizzieren	wesentliche Eigenschaften grafisch, ohne Genauigkeit
interpretieren	Ergebnis im Sachzusammenhang deuten

1 Grundlagen

Dieses Kapitel ist kein Abiturstoff im engeren Sinn – aber fast jeder Punktverlust im hilfsmittelfreien Teil A geht auf Rechenfehler aus der Mittelstufe zurück: ein falsch gekürzter Bruch, ein vergessenes Vorzeichen beim Ausmultiplizieren, ein Potenzgesetz, das es nicht gibt. Die Regeln hier sollten so sicher sitzen, dass man über sie nicht mehr nachdenken muss.

1.1 Zahlenmengen

Zahlen werden in Mengen eingeteilt, je nachdem, welche Rechenarten man darin uneingeschränkt ausführen kann: In $\mathbb{N}$ kann man addieren und multiplizieren, in $\mathbb{Z}$ auch subtrahieren, in $\mathbb{Q}$ zusätzlich dividieren (außer durch null). Erst in $\mathbb{R}$ gibt es Wurzeln aller positiven Zahlen und Grenzwerte wie e oder π. In der Analysis rechnet man fast immer in $\mathbb{R}$ und gibt Definitions- und Lösungsmengen als **Intervalle** an.

Definition

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots; -1; 0; 1; \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	Brüche $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen (auch $\sqrt{2}$, π, e)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Definition

Intervalle: $[a; b]$ mit Rändern, $]a; b[$ ohne Ränder.

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

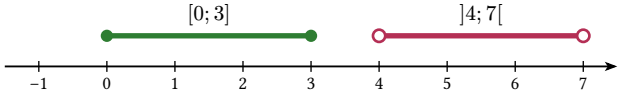


Abbildung 1: Gefüllter Punkt: Rand gehört dazu, offener Punkt: Rand gehört nicht dazu.

Dass $\mathbb{R}$ wirklich mehr Zahlen enthält als $\mathbb{Q}$, ist nicht selbstverständlich: Zwischen zwei Brüchen liegt immer noch ein Bruch, die rationalen Zahlen liegen also „dicht“ auf der Zahlengeraden. Trotzdem haben sie Lücken. Die bekannteste ist $\sqrt{2}$, die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

Satz 1.1 (Irrationalität von $\sqrt{2}$)

$\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen schreiben.

Beweis Angenommen, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q, und der Bruch sei schon vollständig gekürzt. Quadrieren ergibt $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 gerade – und damit auch p (das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade). Mit $p = 2r$ folgt $4r^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2r^2$: Auch q ist gerade. Dann ließe sich der Bruch $\frac{p}{q}$ durch 2 kürzen – ein Widerspruch zur Annahme. Also gibt es keinen solchen Bruch. ∎

Dieser Beweis ist ein **Widerspruchsbeweis**: Man nimmt das Gegenteil an und folgert daraus etwas Unmögliches.

Üben: **noctua** ↗

1.2 Bruchrechnen

Brüche addiert man erst, wenn sie denselben Nenner haben; dazu erweitert man auf den Hauptnenner. Multiplizieren geht dagegen direkt – Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. Durch einen Bruch teilt man, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Dieselben Regeln gelten für Bruchterme mit Variablen, etwa beim Zusammenfassen von Ableitungen oder in Bruchgleichungen.

Begründung Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ändert seinen Wert nicht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert (erweitert): $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$. Bringt man beide Brüche so auf den gemeinsamen Nenner bd, zählt man nur noch gleich große

Teile zusammen: $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Beim Dividieren fragt man: Mit welcher Zahl muss man $\frac{c}{d}$ multiplizieren, um $\frac{a}{b}$ zu erhalten? Probe: $\frac{c}{d} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b}$.

Merksatz

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Beispiel 1

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12} \qquad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

Beispiel 2

Mit Variablen geht es genauso. Hauptnenner ist das Produkt der Nenner:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} \quad (x \neq 0,\ x \neq -1)$$

Ein Doppelbruch wird zur Multiplikation mit dem Kehrbruch:

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$$

Typischer Fehler

Kürzen nur aus **Produkten**: $\frac{2x+4}{2} = x + 2$, aber $\frac{x+4}{x} \neq 4$.

Üben: **noctua** ↗

1.3 Rechengesetze und binomische Formeln

Das Distributivgesetz (Ausmultiplizieren und rückwärts: Ausklammern) ist das wichtigste Werkzeug für Termumformungen. Ausklammern macht aus einer Summe ein Produkt – und Produkte sind leicht gleich null zu setzen (Satz vom Nullprodukt). Die binomischen Formeln sind Sonderfälle des Ausmultiplizierens, die man in beide Richtungen sehen sollte: $x^2 - 9$ ist $(x+3)(x-3)$.

Merksatz

Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Punkt vor Strich, Klammern zuerst.

Merksatz

Binomische Formeln FS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiel 3

$$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4 \qquad x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Begründung Jede binomische Formel ist nur Ausmultiplizieren mit dem Distributivgesetz, z. B.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\ ,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Die erste Formel sieht man auch als Flächenzerlegung eines Quadrats mit der Seite $a + b$ (Abbildung).

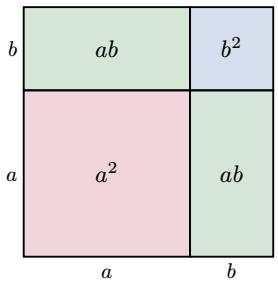


Abbildung 2: Erste binomische Formel als Flächenzerlegung: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Beispiel 4

Ausklammern – bei Funktionen mit e-Term der wichtigste Schritt vor dem Nullsetzen:

$$x^3e^x - 4xe^x = xe^x(x^2-4) = xe^x(x+2)(x-2)$$

Üben: **noctua** ↗

1.4 Potenzen und Wurzeln

Potenzen mit natürlichen Exponenten sind abgekürzte Produkte. Die Potenzgesetze sorgen dafür, dass auch negative und gebrochene Exponenten sinnvoll sind: a^{-n} ist der Kehrwert, $a^{\frac{1}{n}}$ die n-te Wurzel. Das ist beim Ableiten und Integrieren wichtig – Wurzeln und Brüche schreibt man dort als Potenzen, wendet die Potenzregel an und schreibt am Ende zurück.

Definition

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0)$$

Merksatz

Potenzgesetze FS

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Begründung Für natürliche Exponenten zählt man Faktoren: $a^3 \cdot a^2 = (aaa)(aa) = a^5$, und bei $\frac{a^5}{a^2}$ kürzen sich zwei Faktoren weg. Die Definitionen für andere Exponenten sind genau so gewählt, dass diese Gesetze gültig bleiben:

- a^0: Aus $\frac{a^n}{a^n} = 1$ und $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ folgt $a^0 = 1$.
- a^{-n}: Aus $\frac{a^0}{a^n} = a^{-n}$ folgt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- $a^{\frac{1}{n}}$: Soll $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$ gelten, muss $a^{\frac{1}{n}}$ die Zahl sein, deren n-te Potenz a ist – die n-te Wurzel.

Beispiel 5

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4}^3 = 8 \qquad \frac{(x^3)^2}{x^4} = x^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Beispiel 6

Vor dem Ableiten in Potenzen umschreiben:

$$\frac{(2x^3)^2}{4x^{-1}} = \frac{4x^6}{4x^{-1}} = x^7 \qquad \frac{3}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = 3x^{-\frac{3}{2}}$$

Typischer Fehler

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^2 \qquad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad (a^m)^n \neq a^{m^n}$$

Üben: **noctua** ↗

1.5 Logarithmen

Der Logarithmus beantwortet die Frage „Mit welcher Zahl muss ich potenzieren?“. Er ist die Umkehrung des Potenzierens und wird immer dann gebraucht, wenn die Unbekannte im Exponenten steht – bei Wachstumsprozessen, Halbwertszeiten oder der Frage, wie oft man ein Experiment mindestens wiederholen muss. Im Abitur kommt praktisch nur der natürliche Logarithmus ln zur Basis e vor.

Definition

$\log_a(b)$ ist die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(b) \quad (a,\, b > 0,\, a \neq 1)$$

Der **natürliche Logarithmus** ln hat die Basis $e \approx 2{,}718$:

$$e^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(b)$$

Satz 1.2 (Logarithmengesetze) FS

$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$$

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

Beweis Sei $\ln(u) = a$ und $\ln(v) = b$, also $u = e^a$ und $v = e^b$. Mit den Potenzgesetzen gilt

$$u \cdot v = e^a \cdot e^b = e^{a+b}\,,$$

also ist $\ln(uv) = a + b = \ln(u) + \ln(v)$. Genauso folgt aus $\frac{u}{v} = e^{a-b}$ das zweite Gesetz und aus $u^r = (e^a)^r = e^{ra}$ das dritte: $\ln(u^r) = ra = r\ln(u)$. Jedes Logarithmengesetz ist also ein Potenzgesetz, „von der anderen Seite“ gelesen. ∎

Satz 1.3 (Basiswechsel)

Jeder Logarithmus lässt sich mit ln ausrechnen:

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Beweis Aus $x = \log_a(b)$ folgt $a^x = b$. Logarithmieren mit ln und das dritte Gesetz ergeben $x\ln(a) = \ln(b)$, also $x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$. ∎

Beispiel 7

$2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3{,}32$. Probe: $2^3 = 8$ und $2^4 = 16$, das Ergebnis liegt dazwischen.

Beispiel 8

$$\ln(e^3) = 3 \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \qquad e^{2\ln(3)} = e^{\ln(9)} = 9$$

Typischer Fehler

$$\ln(u+v) \neq \ln(u) + \ln(v)$$

$\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert.

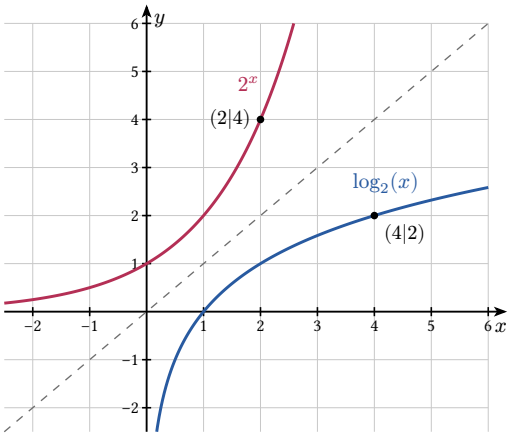
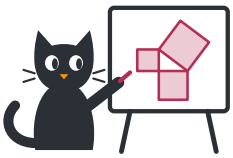


Abbildung 3: $2^2 = 4$ und $\log_2(4) = 2$: Potenz- und Logarithmusfunktion sind an $y = x$ gespiegelt.

Ausprobieren: **Exponential- und Logarithmusfunktion** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Potenzen, Exponential & Logarithmus** ↗ · **e-Funktion & Wachstumsmodelle** ↗



2 Gleichungen

Fast jede Aufgabe der Analysis führt irgendwann auf eine Gleichung: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Schnittpunkte zweier Graphen. Im Teil A muss man sie ohne Taschenrechner lösen – und weil der WTR auch in Teil B keine Gleichungen löst, gilt das praktisch für das ganze Abitur. Die Aufgaben sind deshalb so gebaut, dass eines der folgenden Standardverfahren zum Ziel führt. Die Kunst besteht darin, das passende zu erkennen.

Vorgehen

Welches Verfahren passt?

- Lässt sich etwas **ausklammern**? → Satz vom Nullprodukt.
- Nur x^2, x und Zahl? → pq- oder abc-Formel.
- Nur x^4 und x^2 (oder e^{2x} und e^x)? → Substitution.
- Unbekannte im Exponenten? → Logarithmieren.
- Unbekannte im Nenner? → mit dem Hauptnenner multiplizieren.
- sin oder cos? → Einheitskreis bzw. Graph, Periode beachten.

2.1 Umformen

Eine Gleichung bleibt gültig, wenn man auf beiden Seiten dasselbe tut. Gefährlich sind zwei Umformungen: Das Teilen durch einen Term, der null sein könnte (dabei gehen Lösungen verloren), und das Quadrieren (dabei können Scheinlösungen hinzukommen). Im Zweifel macht man am Ende die Probe.

Merksatz

Auf beiden Seiten dasselbe tun. Multiplizieren oder Dividieren mit **negativen** Zahlen dreht ein Ungleichheitszeichen um. Teilen durch einen Term nur, wenn er nicht null sein kann – sonst gehen Lösungen verloren.

Typischer Fehler

$x^2 = 3x$: **nicht** durch x teilen (die Lösung $x = 0$ ginge verloren), sondern ausklammern: $x(x-3) = 0$.

Umformungen, die man rückwärts genauso machen kann, heißen **Äquivalenzumformungen** ($\Leftrightarrow$): Addieren einer Zahl wird durch Subtrahieren rückgängig gemacht, Multiplizieren mit 3 durch Teilen durch 3. Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung: Aus $a = b$ folgt $a^2 = b^2$, aber aus $a^2 = b^2$ folgt nur $a = b$ **oder** $a = -b$. Deshalb kann beim Quadrieren eine Lösung hinzukommen, die die ursprüngliche Gleichung gar nicht erfüllt.

Beispiel 9

$\sqrt{x+2} = x$. Quadrieren: $x + 2 = x^2$, also $x^2 - x - 2 = 0$ mit $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.
Probe: $\sqrt{4} = 2$ ✓, aber $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. Nur $x = 2$ ist Lösung; $x = -1$ ist eine **Scheinlösung**.

Üben: **noctua** ↗

2.2 Satz vom Nullprodukt

Der Satz vom Nullprodukt ist das wichtigste Werkzeug für Gleichungen der Form „Term $= 0$“. Statt eine komplizierte Gleichung zu lösen, zerlegt man sie in Faktoren und löst mehrere einfache. Deshalb lohnt es sich fast immer, zuerst nach einem gemeinsamen Faktor zu suchen – bei Funktionen mit e-Term ist das meist e^x selbst, der nie null wird.

Satz 2.1 (Satz vom Nullprodukt)

Ein Produkt ist genau dann null, wenn (mindestens) ein Faktor null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Beweis Dass das Produkt null ist, wenn ein Faktor null ist, ist klar. Umgekehrt: Sei $a \cdot b = 0$ und $a \neq 0$. Dann darf man durch a teilen und erhält $b = \frac{0}{a} = 0$. Also ist mindestens ein Faktor null. ∎

Beispiel 10

$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x = 0 \text{ oder } x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$$

Beispiel 11

$$(x^2 + 1)(e^x - 2) = 0$$

$x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung, $e^x = 2$ liefert $x = \ln(2)$.

Üben: **noctua** ↗

2.3 Quadratische Gleichungen

Jede quadratische Gleichung lässt sich mit der abc-Formel lösen; die pq-Formel ist der Sonderfall mit $a = 1$. Geometrisch sucht man die Nullstellen einer Parabel – und die kann zwei, eine oder keine Nullstelle haben, je nachdem, ob sie die x-Achse schneidet, berührt oder verfehlt. Genau das zeigt die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ unter der Wurzel an.

Satz 2.2 (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)
pq-Formel für $x^2 + px + q = 0$: FS

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

abc-Formel für $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$: $D > 0$ zwei, $D = 0$ eine, $D < 0$ keine Lösung.

Herleitung der abc-Formel Man teilt durch $a \neq 0$ und ergänzt quadratisch, d. h. man addiert die Zahl, die zur binomischen Formel fehlt:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Ist die rechte Seite negativ, gibt es keine Lösung, denn ein Quadrat ist nie negativ. Sonst darf man die Wurzel ziehen – mit beiden Vorzeichen:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mit $a = 1$, $b = p$, $c = q$ wird daraus die pq-Formel.

Die quadratische Ergänzung liefert nebenbei die **Scheitelpunktform** einer Parabel, an der man den Scheitel direkt abliest.

Beispiel 12
$f(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 6 = 2(x - 2)^2 - 2$.
Scheitel $S(2 \mid -2)$; die Parabel ist nach oben geöffnet, f hat also zwei Nullstellen ($x = 1$ und $x = 3$).

Beispiel 13

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -2$$

Satz 2.3 (Satz von Vieta)

Hat $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1, x_2, so gilt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Beweis Addiert und multipliziert man die beiden Lösungen der pq-Formel, fällt die Wurzel heraus (mit $w = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$):

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + w\right) + \left(-\frac{p}{2} - w\right) = -p\ ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + w\right)\left(-\frac{p}{2} - w\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - w^2 = q.$$

Damit ist $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + px + q$.

Mit Vieta kann man Lösungen oft im Kopf finden: Für $x^2 - 2x - 8 = 0$ sucht man zwei Zahlen mit Produkt -8 und Summe 2 – das sind 4 und -2.

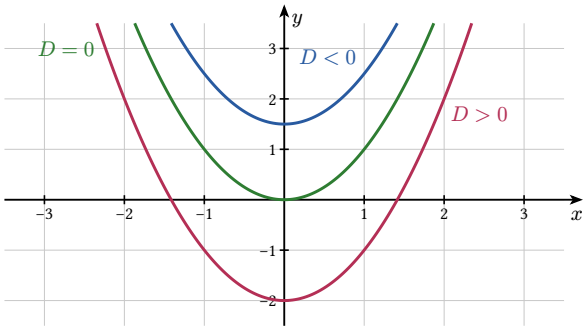


Abbildung 4: Zwei, eine oder keine Nullstelle: $x^2 - 2 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 + 1{,}5 = 0$.

Üben: **noctua** ↗

2.4 Substitution

Bei der Substitution ersetzt man einen wiederkehrenden Ausdruck durch eine neue Variable, sodass eine quadratische Gleichung entsteht. Wichtig ist der letzte Schritt: Man muss **rücksubstituieren** und dabei prüfen, welche Lösungen überhaupt möglich sind – $x^2 = -1$ und $e^x = -2$ haben keine Lösung. Eine Gleichung vierten Grades ohne x^3 und x kann so bis zu vier Lösungen haben.

Vorgehen

Kommt nur x^2 und x^4 (oder e^x und e^{2x}) vor:

a) ersetzen: $u = x^2$ (bzw. $u = e^x$),

b) quadratische Gleichung in u lösen,

c) zurück ersetzen: $x^2 = u$ (bzw. $e^x = u$, nur $u > 0$ möglich).

Beispiel 14

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$u = x^2$: $u^2 - 5u + 4 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$

$x^2 = 1$ oder $x^2 = 4$: $x = \pm 1$, $x = \pm 2$.

Beispiel 15

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$u = e^x$: $u^2 - 3u + 2 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$
$e^x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$.

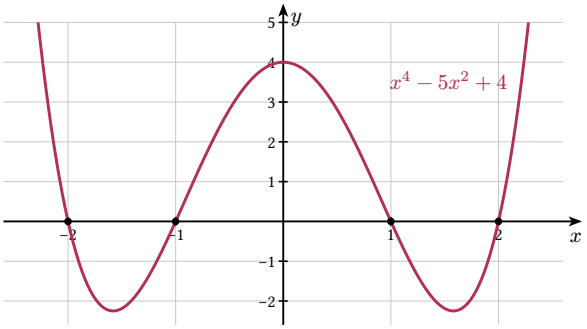


Abbildung 5: Die vier Lösungen ± 1 und ± 2 sind die Nullstellen; der Graph ist achsensymmetrisch.

Üben: **noctua** ↗

2.5 Exponentialgleichungen

Steht die Unbekannte im Exponenten, hilft nur der Logarithmus. Dazu bringt man die Gleichung zuerst in die Form $e^{\text{etwas}} = \text{Zahl}$ und logarithmiert dann beide Seiten. Grafisch sucht man den Schnittpunkt des Graphen von e^x mit einer waagrechten Geraden – daran sieht man auch, warum es für negative Zahlen keine Lösung gibt.

Merksatz

e^x allein auf eine Seite bringen, dann logarithmieren:

$$e^{kx} = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(b)}{k} \quad (b > 0)$$

$e^x > 0$ für alle x: $e^x = -2$ hat keine Lösung.

Beispiel 16

Ein Medikament wird abgebaut: $c(t) = 20e^{-0{,}2t}$ (in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$, t in Stunden). Wann ist die Konzentration auf $2\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gesunken?

$$20e^{-0{,}2t} = 2 \Rightarrow e^{-0{,}2t} = \frac{1}{10} \Rightarrow -0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10) \Rightarrow t = 5\ln(10) \approx 11{,}5$$

Nach etwa 11,5 Stunden.

Typischer Fehler

Bei Ungleichungen mit Logarithmen auf das Vorzeichen achten: $\ln(a) < 0$ für $0 < a < 1$. Aus $0{,}8^n < 0{,}1$ folgt $n\ln(0{,}8) < \ln(0{,}1)$ und nach Division durch die **negative** Zahl $\ln(0{,}8)$: $n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} \approx 10{,}3$, also $n \geq 11$.

Beispiel 17

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$$

$$3e^x - e^{2x} = 2 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

weiter mit Substitution: $x = 0$ oder $x = \ln(2)$.

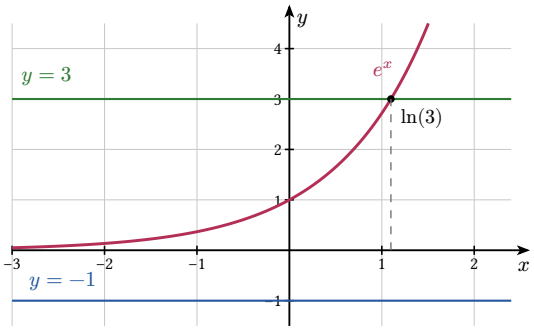


Abbildung 6: $e^x = 3$ hat die Lösung $x = \ln(3) \approx 1{,}1$; $e^x = -1$ hat keine.

Üben: **noctua** ↗

2.6 Bruchgleichungen

Steht die Unbekannte im Nenner, darf sie bestimmte Werte nicht annehmen – diese gehören nicht zur Definitionsmenge. Multipliziert man mit dem Hauptnenner, wird aus der Bruchgleichung eine gewöhnliche Gleichung. Am Ende muss man prüfen, ob die gefundenen Lösungen in der Definitionsmenge liegen.

Merksatz

Definitionsmenge bestimmen, mit dem Hauptnenner multiplizieren, Lösungen mit der Definitionsmenge abgleichen.

Beispiel 18

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1 \quad (x \neq 0) \quad | \cdot x^4$$

$$6 + x^2 = x^4 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0$$

$u = 3$ oder $u = -2$; nur $x^2 = 3$ ist möglich: $x = \pm\sqrt{3}$.

Beispiel 19

$$\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1 \quad (x \neq 1) \quad | \cdot (x-1)$$

$$x = 2 + x - 1 \Rightarrow 0 = 1$$

Diese falsche Aussage bedeutet: Die Gleichung hat keine Lösung, $L = \{\}$.

Üben: **noctua** ↗

2.7 Trigonometrische Gleichungen

Sinus und Kosinus sind periodisch: Eine Gleichung wie $\sin(x) = \frac{1}{2}$ hat unendlich viele Lösungen. Im Abitur ist deshalb immer ein Intervall angegeben. Man findet zunächst eine Lösung (Wertetabelle oder Einheitskreis), dann die zweite über die Symmetrie des Graphen und schließlich alle weiteren durch Addieren der Periode 2π.

Merksatz

Im Intervall $[0; 2\pi]$:

- $\sin(x) = 0$: $x \in \{0; \pi; 2\pi\}$
- $\cos(x) = 0$: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$
- $\sin(x) = a$ hat neben x_1 die zweite Lösung $x_2 = \pi - x_1$,
- $\cos(x) = a$ hat neben x_1 die zweite Lösung $x_2 = 2\pi - x_1$.

Weitere Lösungen: $+2\pi$ (Periode).

Am Einheitskreis sieht man, woher die zweite Lösung kommt: Der Punkt P nach dem Bogen x hat die Koordinaten $(\cos(x) \mid \sin(x))$. Spiegelt man ihn an der y-Achse, erhält man den Punkt nach dem Bogen $\pi - x$ – mit derselben Höhe, also demselben Sinuswert. Spiegelt man an der x-Achse, erhält man den Punkt nach dem Bogen $2\pi - x$ mit demselben Kosinuswert.

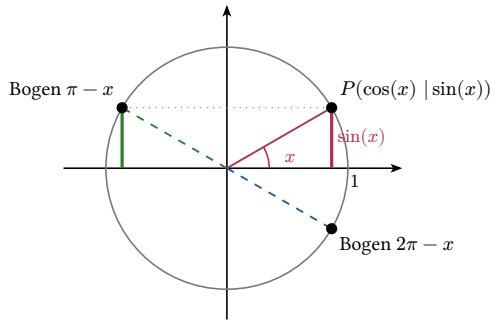


Abbildung 7: Einheitskreis: $\sin(x)$ ist die Höhe, $\cos(x)$ die waagrechte Koordinate von P. Der an der y-Achse gespiegelte Punkt (Bogen $\pi - x$) hat denselben Sinus, der an der x-Achse gespiegelte (Bogen $2\pi - x$) denselben Kosinus.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabelle 1: Werte, die man im Teil A ohne Rechner kennen muss.

Woher kommen die Werte? Halbiert man ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Winkeln $30° = \frac{\pi}{6}$ und $60° = \frac{\pi}{3}$. Die Seite gegenüber dem 30°-Winkel ist die halbe Grundseite, also $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; die dritte Seite ist nach Pythagoras $\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Im halbierten Quadrat mit der Diagonale 1 sind beide Katheten gleich lang: $2a^2 = 1$, also $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Beispiel 20

$\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) = 0$ in $[0; 2\pi]$. Ausklammern:

$$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$$

$\sin(x) = 2$ ist unmöglich, also $\cos(x) = 0$:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Beispiel 21

$\sin(2x) = 0$ in $[0; \pi]$. Für $x \in [0; \pi]$ liegt $2x$ in $[0; 2\pi]$, also

$$2x \in \{0; \pi; 2\pi\} \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}.$$

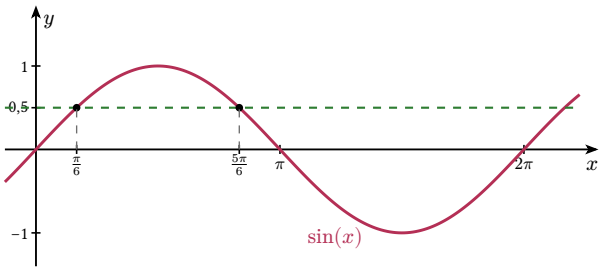


Abbildung 8: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ in $[0; 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und – symmetrisch zu $\frac{\pi}{2}$ – $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 10** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 11** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 12** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 13** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 14** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 15** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 16** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 17** (in der Sammlung Abi-ähnlich).

Ausprobieren: **Sinus und Kosinus am Einheitskreis** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Trigonometrie & Bogenmaß** ↗

2.8 Näherungsverfahren: Newton nicht im Abi 2027

Merksatz

Lässt sich $f(x) = 0$ nicht exakt lösen, ersetzt man den Graphen schrittweise durch seine Tangente und nimmt deren Nullstelle als neue Näherung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (f'(x_n) \neq 0)$$

Ein Startwert nahe der Nullstelle führt meist sehr schnell zum Ziel; bei $f'(x_n) \approx 0$ versagt das Verfahren.

Herleitung der Iterationsformel Die Tangente im Punkt $(x_n \mid f(x_n))$ ist $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Ihre Nullstelle erhält man aus $0 = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$:

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Diese Nullstelle wird die nächste Näherung x_{n+1}.

Beispiel 22

$\sqrt{2}$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, Start $x_0 = 1$:

$$x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = 1{,}41667 \quad x_3 = 1{,}414216 \quad \left(\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots\right)$$

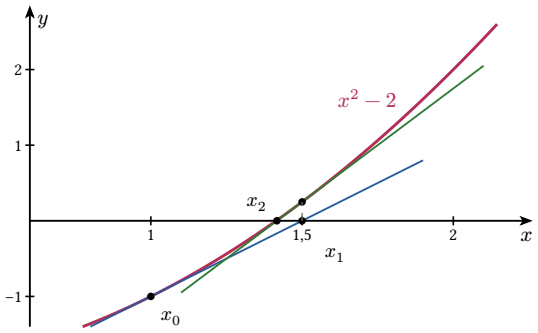
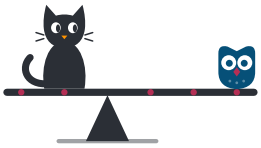


Abbildung 9: Tangente in x_0 (blau) schneidet die Achse bei x_1, die Tangente dort (grün) bei x_2 – schon sehr nahe an $\sqrt{2}$.



3 Funktionen

Funktionen beschreiben Zusammenhänge: die Höhe eines Balls in Abhängigkeit von der Zeit, die Konzentration eines Medikaments, die Kosten in Abhängigkeit von der Stückzahl. Im Abitur muss man die Grundtypen sicher erkennen, ihre Graphen skizzieren und aus einem Graphen auf den Funktionsterm schließen können. Dieses Kapitel stellt die Grundtypen und ihre Eigenschaften zusammen; wie man Graphen mit Ableitungen genauer untersucht, folgt in den Kapiteln danach.

3.1 Grundbegriffe

Entscheidend ist die **Eindeutigkeit**: Jedem x wird genau ein Wert zugeordnet. Ein Graph, den eine senkrechte Gerade zweimal schneidet, gehört deshalb zu keiner Funktion. Umgekehrt darf derselbe Funktionswert mehrfach vorkommen – deshalb sind nicht alle Funktionen umkehrbar.

Definition

Eine **Funktion** f ordnet jedem x der **Definitionsmenge** D_f genau ein $f(x)$ zu. Die Menge aller Funktionswerte ist die **Wertemenge** W_f. Der Graph G_f besteht aus allen Punkten $(x \mid f(x))$.

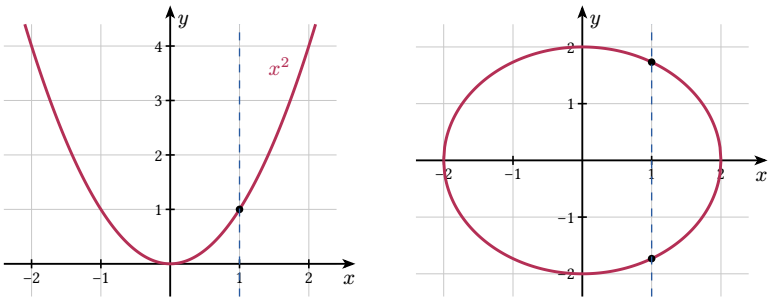


Abbildung 10: Links der Graph einer Funktion: Jede senkrechte Gerade trifft ihn höchstens einmal. Rechts ein Kreis: Zu $x = 1$ gehören zwei y-Werte, er ist kein Funktionsgraph.

Beispiel 23

$f(x) = \sqrt{4 - x}$: Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, also $D_f =]-\infty; 4]$. Die Wurzel nimmt jeden Wert ≥ 0 an: $W_f = [0; \infty[$.

Üben: **noctua** ↗

3.2 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen haben überall dieselbe Steigung: Geht man eine Einheit nach rechts, steigt der Graph um m. Man liest m an einem **Steigungsdreieck** ab. Geraden tauchen im Abitur vor allem als Tangenten und Normalen auf – und dort braucht man genau die Punkt-Steigungs-Form.

Definition

$$f(x) = mx + b$$

m Steigung, b y-Achsenabschnitt.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Satz 3.1 (Orthogonale Geraden)

Zwei Geraden mit Steigungen m_1, m_2 sind **senkrecht** zueinander, wenn FS

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Begründung Das Steigungsdreieck der ersten Geraden hat die Seiten 1 (nach rechts) und m_1 (nach oben). Dreht man es um 90° gegen den Uhrzeigersinn, zeigt die Seite 1 nach oben und die Seite m_1 nach links: Die gedrehte Gerade

steigt um 1, wenn man um m_1 nach **links** geht, hat also die Steigung $m_2 = \frac{1}{-m_1} = -\frac{1}{m_1}$. Das ist gleichbedeutend mit $m_1 \cdot m_2 = -1$.

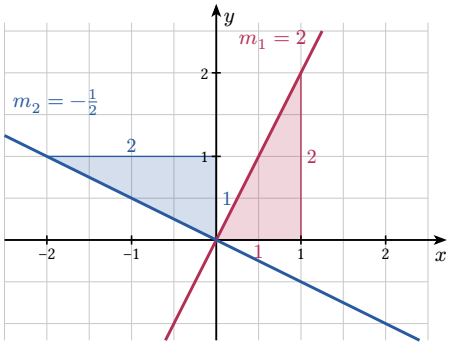


Abbildung 11: Das um 90° gedrehte Steigungsdreieck: aus „1 nach rechts, 2 nach oben“ wird „2 nach links, 1 nach oben“.

Beispiel 24

Gerade durch $P(1|2)$ und $Q(3|8)$: $m = \frac{6}{2} = 3$, $2 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$: $y = 3x - 1$.
Senkrecht dazu durch P: $m = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

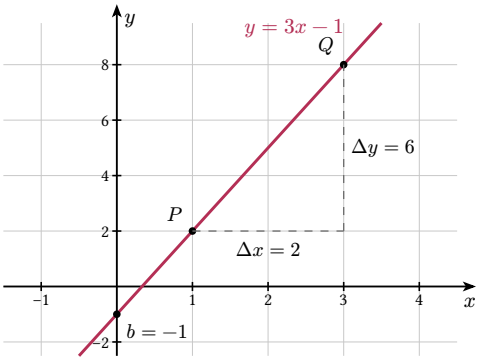


Abbildung 12: Steigungsdreieck: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3$.

Üben: **noctua** ↗

3.3 Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen (Polynome) sind die einfachsten „krummen“ Funktionen. Ihr Verhalten weit außen bestimmt allein der Summand mit der höchsten Potenz, ihr Verhalten in der Mitte die Nullstellen. Kennt man die Nullstellen, kann man den Term als Produkt von **Linearfaktoren** schreiben: Eine einfache Nullstelle $(x - a)$ wird vom Graphen geschnitten, an einer doppelten $((x - a)^2)$ berührt er die Achse nur.

Definition

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Grad n, höchstens n Nullstellen, höchstens $n - 1$ Extremstellen.

Merksatz

Für $|x| \to \infty$ bestimmt der Summand $a_n x^n$ den Verlauf:

- n gerade, $a_n > 0$: von links oben nach rechts oben,
- n ungerade, $a_n > 0$: von links unten nach rechts oben,
- $a_n < 0$: jeweils an der x-Achse gespiegelt.

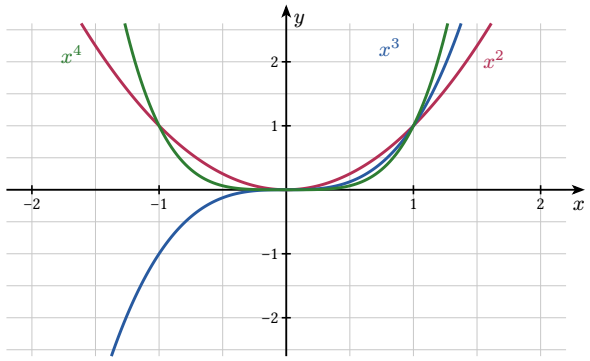


Abbildung 13: Gerade Potenzen (x^2, x^4) sind achsensymmetrisch und kommen links und rechts von oben; ungerade (x^3) kommen von links unten. Alle gehen durch $(0|0)$ und $(1|1)$.

Begründung Klammert man die höchste Potenz aus, wird der Rest für große $|x|$ beliebig klein:

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Die Klammer strebt gegen 1, also verhält sich f weit außen wie $a_n x^n$. Und: Ist x_0 eine Nullstelle, lässt sich $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ schreiben, wobei g den Grad $n - 1$ hat (Polynomdivision). Jede weitere Nullstelle ist eine Nullstelle von g – deshalb hat ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen.

Beispiel 25

$f(x) = -2x^3 + x^2 + 5$: Grad 3 (ungerade), $a_3 = -2 < 0$. Der Graph kommt also von links oben und geht nach rechts unten: $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$.

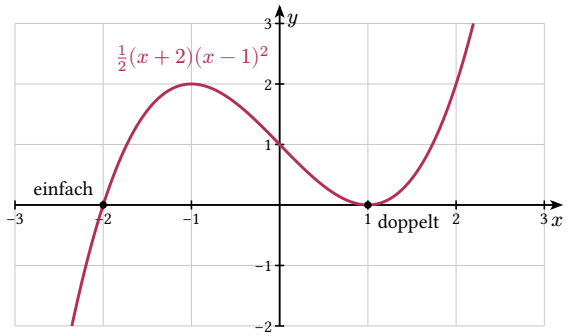


Abbildung 14: Bei der einfachen Nullstelle -2 wechselt der Graph das Vorzeichen, bei der doppelten Nullstelle 1 berührt er die x-Achse.

Ausprobieren: **Ganzrationale Funktionen und Symmetrie** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗

3.4 Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion ist nur für $x \geq 0$ definiert und wächst immer langsamer. Ihr Graph ist der an der Winkelhalbierenden gespiegelte rechte Ast der Normalparabel. Beim Ableiten und Integrieren schreibt man $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Definition

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad D_f = \mathbb{R}_0^+$$

Umkehrfunktion von x^2 für $x \geq 0$.

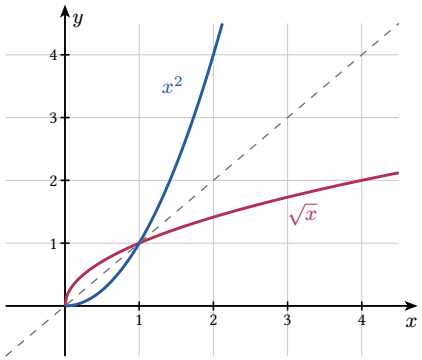


Abbildung 15: $\sqrt{x}$ ist der an $y = x$ gespiegelte rechte Ast der Normalparabel.

Üben: **noctua** ↗

3.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktionen beschreiben Vorgänge, bei denen sich eine Größe in gleichen Zeitabständen um denselben **Faktor** ändert – Wachstum von Bakterien, Abkühlung, radioaktiver Zerfall. Unter allen Basen ist e die natürliche Wahl, weil e^x seine eigene Ableitung ist; jede andere Exponentialfunktion lässt sich wegen $a^x = e^{x\ln(a)}$ damit schreiben. Aus e^x werden durch Verschieben, Strecken und Verketten die Funktionen, die im Abitur vorkommen, etwa e^{-x^2} oder $x \cdot e^{-x}$.

Definition

$$f(x) = e^x, \quad e = 2{,}71828\ldots$$

e ist die einzige Basis, für die $(e^x)' = e^x$ gilt: Steigung = Funktionswert. Die Tangente in $(0|1)$ hat die Steigung 1.

Warum genügt e als Basis? Wegen $a = e^{\ln(a)}$ ist $a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$. Jede Exponentialfunktion ist also eine e-Funktion mit einem Faktor im Exponenten, z. B. $2^x = e^{0{,}693x}$ und $0{,}5^x = e^{-0{,}693x}$. Deshalb rechnet man im Abitur fast nur mit e^{kx}.

Merksatz

Die Zahl e näherungsweise bestimmen: Die Steigung von a^x an der Stelle 0 ist $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$; sie beträgt für $a = 2$ etwa 0,693, für $a = 3$ etwa 1,099. Die Basis mit Steigung genau 1 liegt dazwischen – das ist e. Ebenso nähert sich $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ der Zahl e:

n	1	10	100	1000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,594	2,705	2,717

Merksatz

e^x: $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$, immer positiv, streng monoton wachsend, $e^0 = 1$, waagrechte Asymptote $y = 0$ für $x \to -\infty$.
$\ln(x)$: $D = \mathbb{R}^+$, $W = \mathbb{R}$, Nullstelle $x = 1$, senkrechte Asymptote $x = 0$. ln ist die Umkehrfunktion von e^x; die Graphen liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

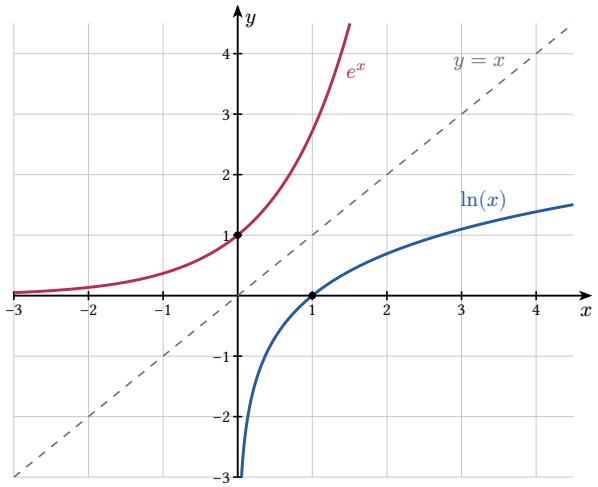


Abbildung 16: e^x und $\ln(x)$ sind Umkehrfunktionen: Die Graphen liegen spiegelbildlich zu $y = x$, aus $(0|1)$ wird $(1|0)$.

Merksatz

Grenzwerte: e^x wächst schneller als jede Potenz, $\ln(x)$ langsamer: FS

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Wie überlegen e^x ist, zeigt eine kleine Tabelle: Bei $x = 10$ ist $x^3 = 1000$ und $e^x \approx 22026$, bei $x = 20$ ist $x^3 = 8000$, e^x aber schon rund 485 Millionen. Jede Potenz wird auf lange Sicht abgehängt – auch x^{100}, es dauert nur länger.

Ausprobieren: **Exponential- und Logarithmusfunktion** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Potenzen, Exponential & Logarithmus** ↗ · **e-Funktion & Wachstumsmodelle** ↗

3.6 Trigonometrische Funktionen

Sinus und Kosinus beschreiben periodische Vorgänge: Schwingungen, Tageslängen, Wasserstände bei Ebbe und Flut. Am Einheitskreis sind $\cos(x)$ und $\sin(x)$ die Koordinaten des Punkts, den man nach einem Bogen der Länge x erreicht. Im Abitur rechnet man immer im **Bogenmaß**. Die vier Parameter a, b, c, d in der allgemeinen Form lassen sich alle am Graphen ablesen.

Definition

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

- Amplitude $|a|$,
- Periode $p = \frac{2\pi}{b}$,
- Verschiebung um c nach rechts und d nach oben ($y = d$ ist die Mittellinie).

Für cos entsprechend. Es gilt $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

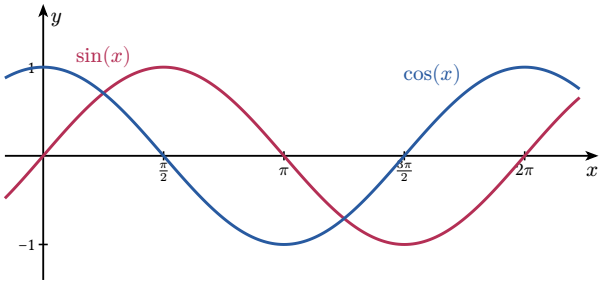


Abbildung 17: Sinus und Kosinus haben die Periode 2π und Werte zwischen -1 und 1; der Kosinus ist der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinus.

Warum ist die Periode $\frac{2\pi}{b}$? Eine volle Schwingung ist durchlaufen, wenn das Argument bx um 2π gewachsen ist. Aus $b(x + p) = bx + 2\pi$ folgt $p = \frac{2\pi}{b}$. Ist $b > 1$, wird die Kurve gestaucht (kürzere Periode), bei $b < 1$ gestreckt.

Beispiel 26

$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1$: Amplitude 2, Periode $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$, Mittellinie $y = -1$, Maximum 1, Minimum -3.

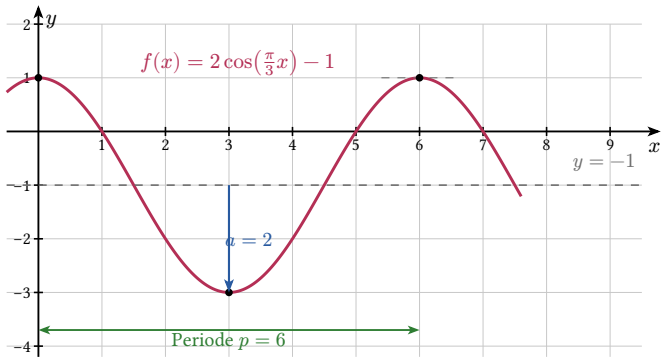


Abbildung 18: Maxima ($y = 1$) bei $x = 0$ und $x = 6$, Minimum ($y = -3$) bei $x = 3$. Die Mittellinie $y = -1$ liegt in der Mitte zwischen Maximum und Minimum; die Amplitude $a = 2$ ist der Abstand von der Mittellinie zum Minimum (oder Maximum), die Periode der Abstand zweier Maxima.

Ausprobieren: **Sinus und Kosinus am Einheitskreis** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Trigonometrie & Bogenmaß** ↗

3.7 Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen entstehen als Quotient. Spannend sind sie an den Stellen, an denen der Nenner null wird: Dort ist die Funktion nicht definiert, und der Graph schießt meist nach oben oder unten weg (**Polstelle**). Weit außen nähert sich der Graph oft einer waagrechten Geraden. Im Leistungsfach genügt es, diese Asymptoten in einfachen Fällen zu erkennen.

Definition

Quotient zweier Funktionsterme, z. B. $f(x) = \frac{2}{3x^2-4}$ oder $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Nullstellen des Nenners gehören nicht zu D_f.

Merksatz

- **Senkrechte Asymptote** (Polstelle) bei x_0, wenn der Nenner dort null ist, der Zähler nicht.
- **Waagrechte Asymptote** $y = a$, wenn $f(x) \to a$ für $x \to \pm\infty$; z. B. $1 - \frac{1}{x^2} \to 1$.

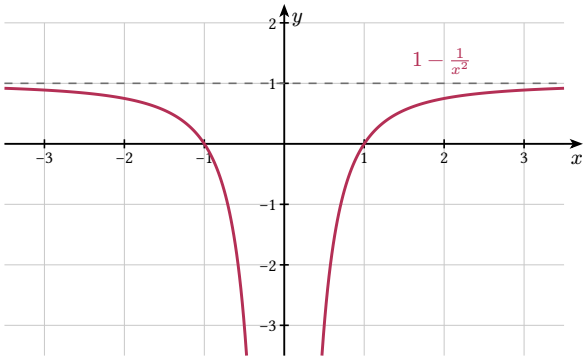


Abbildung 19: $1 - \frac{1}{x^2}$: Für große $|x|$ wird $\frac{1}{x^2}$ winzig, der Graph nähert sich der Asymptote $y = 1$. Bei $x = 0$ (Nenner null) geht er nach $-\infty$.

Beispiel 27

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$: Polstelle bei $x = 3$ (Nenner null, Zähler $7 \neq 0$). Für das Verhalten weit außen teilt man Zähler und Nenner durch x:

$$f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \to \frac{2}{1} = 2 \quad \text{für } x \to \pm\infty$$

Waagrechte Asymptote $y = 2$.

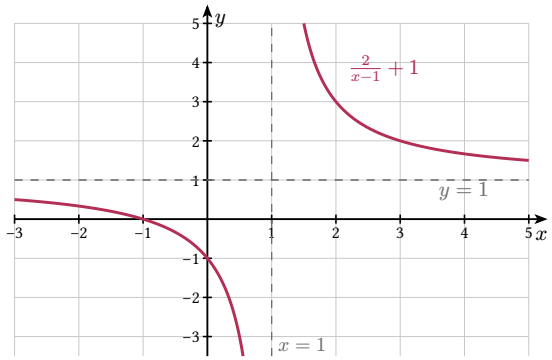


Abbildung 20: Polstelle bei $x = 1$ (Nenner null), waagrechte Asymptote $y = 1$.

Ausprobieren: **Asymptoten und gebrochenrationale Funktionen ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen ↗** · **Folgen, Grenzwert & Stetigkeit ↗**

3.8 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion beantwortet die umgekehrte Frage: Nicht „Welcher Wert gehört zu x?“, sondern „Zu welchem x gehört dieser Wert?“. Das geht nur, wenn jeder Funktionswert genau einmal vorkommt – also wenn f streng monoton ist. Der Facherlass 2027 setzt Umkehrfunktionen ausdrücklich voraus: Definitions- und Wertemenge, Graph und Funktionsterm.

Definition

Ist f streng monoton, so gibt es die **Umkehrfunktion** $\overline{f}$: sie macht die Zuordnung rückgängig, $\overline{f}(f(x)) = x$. Es gilt $D_{\overline{f}} = W_f$ und $W_{\overline{f}} = D_f$; der Graph entsteht durch Spiegelung an $y = x$.

Begründung Liegt $(a \mid b)$ auf dem Graphen von f, also $f(a) = b$, dann ist $\overline{f}(b) = a$: Der Punkt $(b \mid a)$ liegt auf dem Graphen von $\overline{f}$. Das Vertauschen der Koordinaten ist genau die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$. Strenge Monotonie braucht man, damit zu jedem b nur **ein** a gehört: $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht umkehrbar ($f(-2) = f(2) = 4$), wohl aber auf $[0; \infty[$.

Vorgehen

a) $y = f(x)$ nach x auflösen,

b) x und y vertauschen.

Beispiel 28

$f(x) = e^{2x-1}$: $y = e^{2x-1} \Rightarrow \ln(y) = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{\ln(y)+1}{2}$.

$\overline{f}(x) = \frac{\ln(x)+1}{2}$, $D_{\overline{f}} = \mathbb{R}^+$.

Satz 3.2 (Ableitung der Umkehrfunktion Zusatz**)**

Ist f differenzierbar und streng monoton mit $f' \neq 0$, so gilt

$$\left(\overline{f}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(\overline{f}(x)\right)}.$$

Beweis Für alle x aus dem Definitionsbereich von $\overline{f}$ gilt $f\left(\overline{f}(x)\right) = x$. Leitet man beide Seiten ab – links mit der Kettenregel –, erhält man

$$f'\left(\overline{f}(x)\right) \cdot \left(\overline{f}\right)'(x) = 1$$

und daraus die Formel. Geometrisch: Beim Spiegeln an $y = x$ wird aus einem Steigungsdreieck mit „1 nach rechts, m nach oben“ eines mit „m nach rechts, 1 nach oben“ – die Steigungen in gespiegelten Punkten sind Kehrwerte. ∎

Beispiel 29

ln ist die Umkehrfunktion von e^x: $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.
$f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}^+$, $\overline{f}(x) = \sqrt[3]{x}$: $\left(\overline{f}\right)'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

Beispiel 30

Ableitung der Wurzelfunktion, hergeleitet über die Umkehrfunktion: $\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ auf $[0;\infty[$, $f'(x) = 2x$. Also

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$$

– genau das, was die Potenzregel mit $r = \frac{1}{2}$ liefert. Ebenso bestätigt man die Potenzregel für alle Exponenten $\frac{1}{n}$.

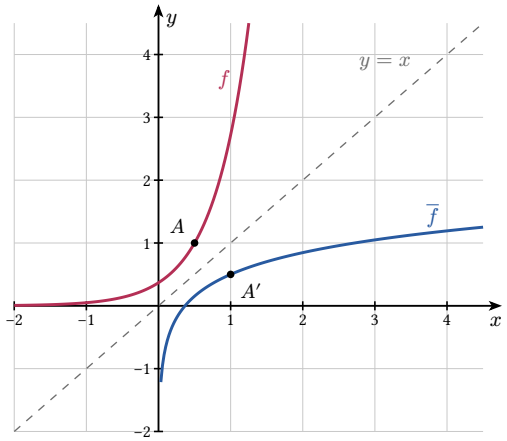


Abbildung 21: Aus jedem Punkt $(a|b)$ von f wird der Punkt $(b|a)$ von $\overline{f}$, z. B. aus $A\left(\frac{1}{2} \mid 1\right)$ der Punkt $A'\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Typischer Fehler

Falsch: $\overline{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Richtig: Die Umkehrfunktion macht f rückgängig: $\overline{f}(f(x)) = x$. Man löst $y = f(x)$ nach x auf und vertauscht die Variablen; der Graph ist die Spiegelung an der Geraden $y = x$.

Der Kehrwert $\frac{1}{f(x)}$ ist etwas ganz anderes.

Ausprobieren: **Umkehrfunktion: Spiegeln an y = x** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗

3.9 Verkettung

Bei einer Verkettung wird das Ergebnis einer Funktion in eine zweite eingesetzt. Das Erkennen der inneren und äußeren Funktion ist die Voraussetzung für die Kettenregel und die lineare Substitution beim Integrieren. Faustregel: Die **innere** Funktion ist das, was man beim Berechnen eines Funktionswerts zuerst ausrechnet.

Definition

$(u \circ v)(x) = u(v(x))$: erst v (innere Funktion), dann u (äußere Funktion).

Beispiel 31

$f(x) = e^{-x^2}$: innen $v(x) = -x^2$, außen $u(z) = e^z$.
$g(x) = \sqrt{4x-7}$: innen $4x - 7$, außen $\sqrt{z}$, $D_g = [\frac{7}{4};\infty[$.

Beispiel 32

$h(x) = \ln(x^2 - 1)$: Die äußere Funktion ln verlangt ein positives Argument, also $x^2 - 1 > 0$, d. h. $x < -1$ oder $x > 1$: $D_h = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$.
Auch die Reihenfolge zählt: Für $u(z) = z^2$ und $v(x) = x + 1$ ist $u(v(x)) = (x+1)^2$, aber $v(u(x)) = x^2 + 1$.

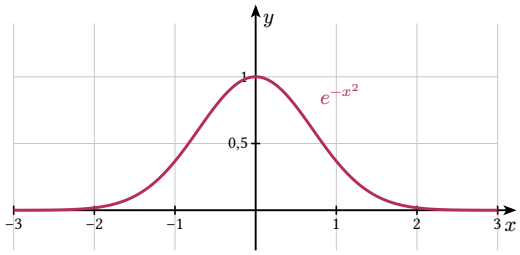


Abbildung 22: Die Verkettung von $-x^2$ (innen) und e^z (außen) ergibt die Glockenkurve.

Ausprobieren: **Verkettung: zwei Funktionsmaschinen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗

3.10 Graphen verschieben, strecken, spiegeln

Viele Funktionen im Abitur sind abgewandelte Grundfunktionen. Wer die Wirkung der Parameter kennt, kann den Graphen skizzieren, ohne eine Wertetabelle zu rechnen – und umgekehrt aus einem Graphen den Term ablesen. Wichtig: Änderungen **innerhalb** des Funktionsarguments ($x - c$, bx) wirken in x-Richtung und „umgekehrt“ (Verschiebung um c nach **rechts**), Änderungen **außen** wirken in y-Richtung.

Merksatz

Aus dem Graphen von f entsteht der Graph von

$f(x) + d$	um d nach oben verschoben
$f(x - c)$	um c nach **rechts** verschoben
$a \cdot f(x)$	in y-Richtung mit Faktor a gestreckt
$f(bx)$	in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$ gestreckt
$-f(x)$	an der x-Achse gespiegelt
$f(-x)$	an der y-Achse gespiegelt

Beispiel 33

$h(x) = -2 \cdot f(x - 5) + 1$: um 5 nach rechts, mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt, an der x-Achse gespiegelt, um 1 nach oben. Wertemenge von f: $[-1; 4]$ → Wertemenge von h: $[-7; 3]$.

Warum nach rechts? Der Graph von $g(x) = f(x - c)$ hat an der Stelle $x_0 + c$ den Wert $g(x_0 + c) = f(x_0)$. Was f bei x_0 macht, macht g also erst um c später – der ganze Graph ist um c nach rechts gerückt. Genauso ist bei $f(bx)$ alles, was f an der Stelle x_0 zeigt, schon bei $\frac{x_0}{b}$ zu sehen: Der Graph wird in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$ gestaucht bzw. gestreckt.

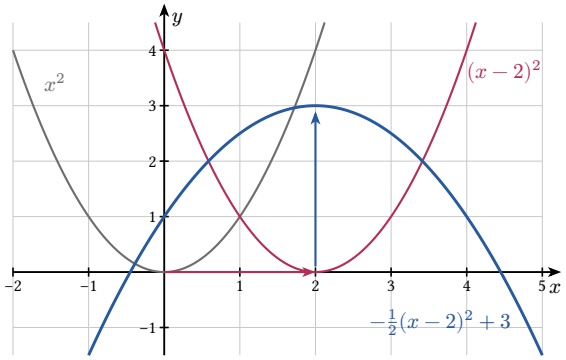


Abbildung 23: Erst um 2 nach rechts, dann mit $-\frac{1}{2}$ gestreckt und gespiegelt, zuletzt um 3 nach oben.

Ausprobieren: **Graphen verschieben, strecken, spiegeln** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗

3.11 Symmetrie

Symmetrie spart Arbeit: Bei einem achsensymmetrischen Graphen kennt man mit der rechten Hälfte auch die linke, bei einer Fläche genügt es, eine Hälfte zu berechnen und zu verdoppeln. Bei ganzrationalen Funktionen erkennt man Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse sofort an den Exponenten.

Satz 3.3 (Symmetrie)

- **Achsensymmetrie** zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$; bei ganzrationalen Funktionen nur gerade Exponenten.
- **Punktsymmetrie** zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$; nur ungerade Exponenten.
- Symmetrie zu $x = a$: $f(a + h) = f(a - h)$.

Beispiel 34

$f(x) = x^4 - 2x^2$: achsensymmetrisch. $g(x) = x^3 - 3x$: punktsymmetrisch. $h(x) = x^3 + 1$: weder noch.

Beweis Für gerade n ist $(-x)^n = x^n$, für ungerade $(-x)^n = -x^n$. Enthält f nur gerade Exponenten (die Konstante zählt als x^0), ändert sich beim Einsetzen von $-x$ nichts: $f(-x) = f(x)$. Enthält f nur ungerade Exponenten, wechselt jeder Summand sein Vorzeichen: $f(-x) = -f(x)$. ∎

Beispiel 35

Symmetrie zu einer anderen Achse: $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Behauptung: symmetrisch zu $x = 2$.

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 4(2 + h) + 1 = h^2 - 3, \quad f(2 - h) = (2 - h)^2 - 4(2 - h) + 1 = h^2 - 3$$

Beide Werte sind gleich, die Behauptung stimmt.

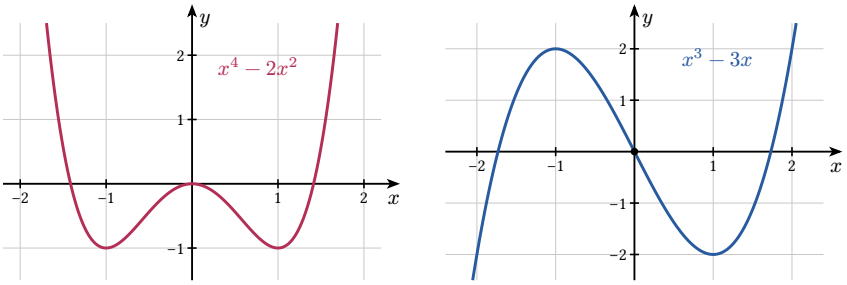


Abbildung 24: Links achsensymmetrisch zur y-Achse (nur gerade Exponenten), rechts punktsymmetrisch zum Ursprung (nur ungerade).

Ausprobieren: **Ganzrationale Funktionen und Symmetrie** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗

3.12 Funktionenscharen

Eine Funktionenschar ist eine ganze Familie von Funktionen, die sich nur im Wert eines Parameters unterscheiden. Typische Abiturfragen: Gibt es Punkte, durch die alle Graphen gehen? Für welchen Parameter hat der Graph eine bestimmte Eigenschaft? Wo liegen die Extrempunkte aller Graphen? Man rechnet dabei mit dem Parameter wie mit einer festen Zahl.

Definition

Eine Schar f_a ist eine Menge von Funktionen mit einem Parameter a, z. B. $f_a(x) = ax^2$. Für jeden Wert von a gibt es einen Graphen G_a.

Merksatz

Gemeinsame Punkte aller Graphen: $f_a(x) = f_b(x)$ für $a \neq b$ ansetzen – die Lösungen hängen dann nicht vom Parameter ab.

Beispiel 36

$f_a(x) = ax^2 - a + 1$:
$f_a(x) - f_b(x) = (a - b)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Alle Graphen gehen durch $(-1 \mid 1)$ und $(1 \mid 1)$.

Merksatz

Ortskurve: Hängt ein besonderer Punkt (z. B. ein Extrempunkt) von a ab, $E_a(x(a) \mid y(a))$, so $x = x(a)$ nach a auflösen und in $y(a)$ einsetzen. Die entstehende Gleichung $y = g(x)$ beschreibt die Kurve, auf der alle diese Punkte liegen. Ist a eingeschränkt (etwa $a > 0$), gehört nur der Teil der Kurve dazu, dessen x-Werte auch vorkommen.

Beispiel 37

$f_a(x) = x^2 - 4ax + 1$ hat den Tiefpunkt $T_a(2a \mid 1 - 4a^2)$. Mit $a = \frac{x}{2}$ folgt $y = 1 - x^2$: alle T_a liegen auf der Parabel $y = 1 - x^2$. Ist nur $a > 0$ zugelassen, liegen die Tiefpunkte nur auf dem Ast mit $x > 0$.

Beispiel 38

Nachweis ohne Auflösen. Soll man nur zeigen, dass alle Punkte auf einer **gegebenen** Kurve liegen, genügt Einsetzen: Für $f_a(x) = x^3 - 3a^2x$ $(a > 0)$ ist $f_a'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 0$ bei $x = \pm a$, der Tiefpunkt ist $T_a(a \mid -2a^3)$. Er liegt auf der Kurve $y = -2x^3$, denn $-2 \cdot a^3 = -2a^3$.

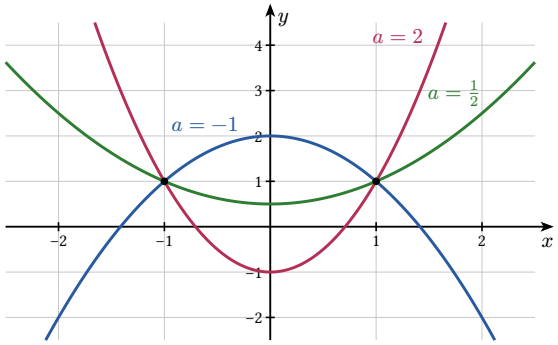


Abbildung 25: $f_a(x) = ax^2 - a + 1$ für drei Werte von a: Alle Graphen gehen durch $(-1|1)$ und $(1|1)$.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 18** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 19** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 20** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 21** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 22** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 1** (Umkehrfunktion, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 2** (Ortskurve, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Funktionenscharen und Ortskurven** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗



4 Differential- und Integralrechnung

Die beiden großen Ideen der Analysis sind Gegenstücke: Die **Ableitung** beschreibt, wie schnell sich eine Größe in einem Moment ändert (lokale Änderungsrate, Steigung). Das **Integral** summiert viele kleine Änderungen zu einer Gesamtänderung auf (Bestand, Fläche). Der Hauptsatz verbindet beides: Integrieren ist die Umkehrung des Ableitens. Dieses Kapitel stellt die Werkzeuge bereit; angewendet werden sie in der Kurvenuntersuchung und bei Wachstumsprozessen.

4.1 Die Ableitung

Die **mittlere** Änderungsrate zwischen zwei Stellen ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte des Graphen. Rückt der zweite Punkt immer näher an den ersten heran ($h \to 0$), wird aus der Sekante die Tangente und aus der mittleren die **momentane** Änderungsrate. Im Sachzusammenhang ist die Ableitung immer eine Rate: Geschwindigkeit, Wachstumsgeschwindigkeit, Zuflussrate – mit der Einheit „Einheit von f pro Einheit von x“.

Definition

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die **Steigung** des Graphen (der Tangente) an der Stelle x_0 – bzw. die **momentane Änderungsrate**: FS

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

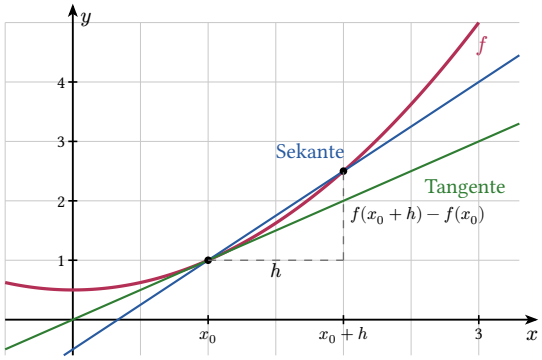


Abbildung 26: Für $h \to 0$ dreht sich die Sekante in die Tangente; ihre Steigung wird zu $f'(x_0)$.

Der Bruch im Grenzwert heißt **Differenzenquotient**: Er ist die Steigung der Sekante durch $(x_0 \mid f(x_0))$ und $(x_0 + h \mid f(x_0 + h))$. Man darf $h = 0$ nicht direkt einsetzen (Division durch null). Stattdessen formt man den Bruch so um, dass sich h herauskürzt, und lässt erst danach h gegen null gehen.

Beispiel 39

Ableitung von $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x_0:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h \quad \to \quad 2x_0 \quad \text{für } h \to 0$$

Also $f'(x_0) = 2x_0$: An der Stelle 3 hat die Normalparabel die Steigung 6.

Beispiel 40

Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x_0 \neq 0)$:

$$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{h x_0 (x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0 (x_0 + h)} \quad \to \quad -\frac{1}{x_0^2}$$

Eine Funktion heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn dieser Grenzwert existiert. Anschaulich: Der Graph hat dort eine eindeutige Tangente – keinen Sprung und keinen Knick. $f(x) = |x|$ ist bei 0 nicht differenzierbar: Von rechts nähern sich die Sekantensteigungen 1, von links -1.

Beispiel 41

Mittlere und momentane Änderungsrate im Sachzusammenhang. Ein Ball wird hochgeworfen, seine Höhe ist $h(t) = 20t - 5t^2$ (in m, t in s). Mittlere Geschwindigkeit in der ersten Sekunde: $\frac{h(1)-h(0)}{1} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Momentangeschwindigkeit zur Zeit t über den Differenzenquotienten:

$$\frac{h(t+k)-h(t)}{k} = \frac{20k - 10tk - 5k^2}{k} = 20 - 10t - 5k \quad \to \quad 20 - 10t \quad \text{für } k \to 0$$

Also $h'(t) = 20 - 10t$: $h'(0) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beim Abwurf und $h'(2) = 0$ im höchsten Punkt.

Ausprobieren: **Sekante wird Tangente** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗

4.2 Ableitungsregeln

Mit wenigen Regeln lässt sich jede Funktion des Abiturs ableiten. Der Trick ist, die **Struktur** eines Terms zu erkennen: Ist er eine Summe (Summenregel), ein Produkt zweier Funktionen (Produktregel) oder eine Funktion in einer Funktion (Kettenregel)? Bei Termen wie $x^2 \cdot e^{-3x}$ braucht man beide – Produktregel außen, Kettenregel für e^{-3x}. Danach lohnt sich fast immer das Ausklammern, weil man mit der Ableitung meist weiterrechnet (Nullstellen von f').

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Tabelle 2: Tabelle FS

Warum stehen gerade diese Ableitungen in der Tabelle? Die Potenzregel ist unten bewiesen. Für die übrigen Grundfunktionen:

Satz 4.1 (Ableitung der Exponentialfunktionen)
Für $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ ist die Ableitung ein Vielfaches der Funktion selbst:

$$f'(x) = f'(0) \cdot a^x.$$

Für die Basis e ist $f'(0) = 1$, also $(e^x)' = e^x$; allgemein gilt $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$ und $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$.

Beweis Mit dem Potenzgesetz $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$ lässt sich a^x aus dem Differenzenquotienten ausklammern:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$$

Der zweite Faktor hängt nicht von x ab: Er ist der Differenzenquotient von f an der Stelle 0 und strebt für $h \to 0$ gegen $f'(0)$. Die Zahl e ist gerade die Basis, für die diese Steigung in $(0 \mid 1)$ genau 1 ist. Für eine andere Basis schreibt man $a^x = e^{x\ln(a)}$ und leitet mit der Kettenregel ab: $(a^x)' = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$. Insbesondere ist $f'(0) = \ln(a)$ – für $a = 2$ also $\ln(2) \approx 0{,}693$, wie die Tabelle im Abschnitt über die Zahl e zeigt. ∎

Die Ableitung von $\ln(x)$ folgt aus der Umkehrregel: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ (Beispiel im Abschnitt Umkehrfunktion). Für Sinus und Kosinus genügt im Leistungsfach eine anschauliche Begründung:

Ableitung von $\sin(x)$ Am Graphen liest man die Steigungen von sin ab: In 0 ist die Steigung 1 (für kleine x ist $\sin(x) \approx x$, der Bogen am Einheitskreis ist fast so lang wie die Höhe), bei $\frac{\pi}{2}$ ist sie 0 (Hochpunkt), bei π ist sie -1, bei $\frac{3\pi}{2}$ wieder 0. Diese Werte – 1, 0, -1, 0 – sind genau die Werte von $\cos(x)$. Ein exakter Beweis benutzt die Additionstheoreme. Weil $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ist, folgt mit der Kettenregel $(\cos(x))' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

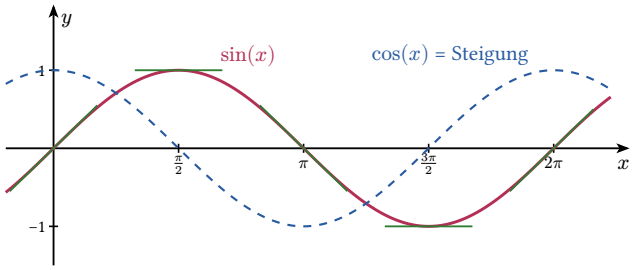


Abbildung 27: Tangenten an $\sin(x)$ (grün) haben die Steigungen 1, 0, −1, 0, 1 – das sind die Werte von $\cos(x)$ (blau gestrichelt).

Satz 4.2 (Faktor- und Summenregel)

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \qquad (u + v)' = u' + v'$$

Satz 4.3 (Potenzregel)

FS Für jede reelle Zahl r ist

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}.$$

Beweis der Potenzregel für natürliche n Multipliziert man $(x+h)^n = (x+h)(x+h)\ldots(x+h)$ aus, entsteht x^n, dann n-mal der Summand $x^{n-1}h$ (aus jeder Klammer einmal das h), und alle übrigen Summanden enthalten mindestens h^2:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2 \cdot R(x,\, h)$$

Im Differenzenquotienten bleibt

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + h \cdot R(x,\, h) \quad \to \quad nx^{n-1}.$$

Für negative und gebrochene Exponenten folgt die Regel aus der Ketten- bzw. Umkehrregel (siehe unten); sie gilt für jedes reelle r.

Beweis Der Differenzenquotient von $u + v$ ist die Summe der Differenzenquotienten von u und v, und der Grenzwert einer Summe ist die Summe der Grenzwerte. Ebenso lässt sich ein konstanter Faktor k vor den Grenzwert ziehen. Anschaulich: Wird ein Graph in y-Richtung mit k gestreckt, werden alle Steigungen mit k multipliziert.

Satz 4.4 (Produktregel)

FS

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Beweis Man schiebt im Zähler des Differenzenquotienten den Term $u(x)v(x+h)$ ein – einmal abgezogen, einmal addiert:

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Für $h \to 0$ strebt der erste Bruch gegen $u'(x)$, $v(x+h)$ gegen $v(x)$ und der zweite Bruch gegen $v'(x)$. Also $(uv)' = u'v + uv'$.

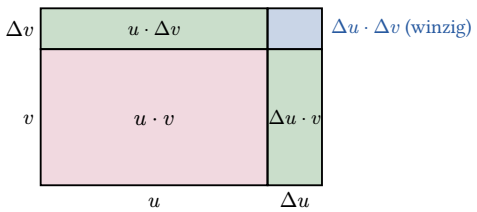


Abbildung 28: Produktregel als Flächenzuwachs: Wachsen die Seiten eines Rechtecks um Δu und Δv, wächst die Fläche um $\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v$ und ein winziges Eckstück, das beim Grenzübergang keine Rolle spielt.

Beispiel 42

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-5x} + x^2 \cdot (-5)e^{-5x} = (2x - 5x^2)e^{-5x}$$

Satz 4.5 (Kettenregel)

FS Äußere Ableitung mal innere Ableitung:

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Begründung Beweisidee: Man erweitert den Differenzenquotienten mit der Änderung der inneren Funktion, $\Delta v = v(x+h) - v(x)$ (falls $\Delta v \neq 0$):

$$\frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = \frac{u(v(x) + \Delta v) - u(v(x))}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{h}$$

Für $h \to 0$ geht auch $\Delta v \to 0$; der erste Bruch strebt gegen $u'(v(x))$, der zweite gegen $v'(x)$. Anschaulich: Ändert sich v doppelt so schnell wie x und u dreimal so schnell wie v, dann ändert sich u sechsmal so schnell wie x – die Raten multiplizieren sich.

Beispiel 43

$$f(x) = (4 + e^{3x})^5$$

$$f'(x) = 5(4 + e^{3x})^4 \cdot 3e^{3x} = 15e^{3x}(4 + e^{3x})^4$$

Beispiel 44

$$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$f(x) = e^{kx} \Rightarrow f'(x) = ke^{kx}$$

Merksatz

Gebrochenrationale Funktionen in einfachen Fällen mit der Kettenregel: Nenner als Potenz mit negativem Exponenten schreiben.

Beispiel 45

$$f(x) = \frac{2}{3x^2 - 4} = 2(3x^2 - 4)^{-1}$$

$$f'(x) = -2(3x^2 - 4)^{-2} \cdot 6x = \frac{-12x}{(3x^2 - 4)^2}$$

Satz 4.6 (Quotientenregel Zusatz)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Beweis Schreibe $\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$. Mit Produkt- und Kettenregel:

$$(u \cdot v^{-1})' = u' \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2} \cdot v' = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Wichtig

Ausklammern vereinfacht: $(2 - 3x)e^{-x}$ ergibt $f'(x) = -3e^{-x} - (2 - 3x)e^{-x} = (3x - 5)e^{-x}$. Der Faktor e^{-x} ist nie null – Nullstellen von f' kommen nur aus der Klammer.

Beispiel 46

Alle Regeln zusammen: $f(x) = x \cdot \sqrt{2x+1} = x(2x+1)^{\frac{1}{2}}$.

$$f'(x) = 1 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((2x+1)+x) = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

Ausgeklammert wird hier die **niedrigere** Potenz $(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Beispiel 47

Zweite Ableitung: $f(x) = xe^{-x}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$,

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}.$$

Bei Funktionen der Form „Polynom mal e^{-x}“ entsteht beim Ableiten immer wieder dieselbe Form – nur das Polynom ändert sich.

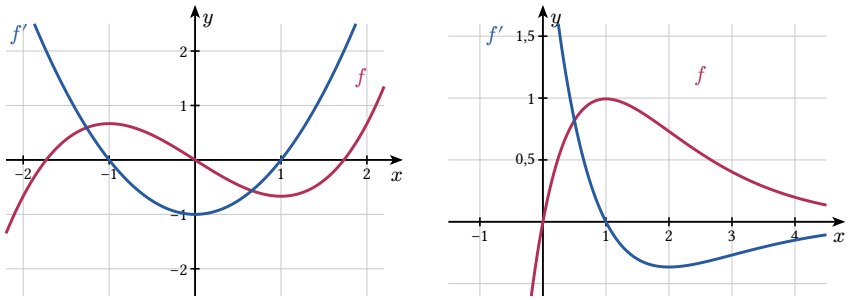


Abbildung 29: Wo f' positiv ist, steigt f; Nullstellen von f' markieren die waagrechten Tangenten von f. Rechts $f(x) = ex \cdot e^{-x}$.

Typischer Fehler

Falsch: $(e^{2x})' = e^{2x}$ und $(\sin(3x))' = \cos(3x)$.

Richtig: Kettenregel: die innere Ableitung nicht vergessen. $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ und $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$.

Ausprobieren: **Produktregel und Kettenregel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗

4.3 Stammfunktionen

Eine Stammfunktion ist eine Funktion, deren Ableitung die gegebene Funktion ist – man sucht also rückwärts. Weil Konstanten beim Ableiten wegfallen, gibt es zu jeder Funktion unendlich viele Stammfunktionen, deren Graphen gegeneinander in y-Richtung verschoben sind. Eine Zusatzbedingung wie „$F(1) = 5$“ legt die Konstante fest. Kontrolle ist immer möglich: Die gefundene Stammfunktion ableiten.

Definition

F heißt **Stammfunktion** von f, wenn $F' = f$. Mit F ist auch $F + C$ eine Stammfunktion.

Mehr Stammfunktionen gibt es nicht Sind F und G zwei Stammfunktionen von f auf einem Intervall, dann ist $(F-G)' = f - f = 0$. Eine Funktion mit Ableitung null hat überall waagrechte Tangenten, sie steigt und fällt nirgends – sie ist konstant (genauer: das folgt aus dem Mittelwertsatz, Abschnitt Monotonie). Also $F = G + C$.

$f(x)$	$F(x)$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\ln(x)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

Tabelle 3: Grundstammfunktionen; jede Zeile prüft man durch Ableiten der rechten Spalte.

Satz 4.7 (Lineare Substitution)
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist

$$\frac{1}{a}F(ax+b) \quad \text{eine Stammfunktion von} \quad f(ax+b)$$

Beweis Ableiten mit der Kettenregel: $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$. ∎

Satz 4.8 (Regeln für Stammfunktionen)
Sind F und G Stammfunktionen von f und g, so ist $kF+G$ eine Stammfunktion von $kf+g$.

Beweis Nach Faktor- und Summenregel der Ableitung ist $(kF+G)' = kF' + G' = kf + g$. ∎

Typischer Fehler
Für Produkte und Verkettungen gibt es **keine** so einfache Regel: Eine Stammfunktion von xe^x ist **nicht** $\frac{x^2}{2}\cdot e^x$. Solche Stammfunktionen werden im Abitur angegeben und sind durch Ableiten zu überprüfen.

Beispiel 48

$$f(x) = e^{4x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = 6\cos(3x) \Rightarrow F(x) = 2\sin(3x)$$

Beispiel 49
Stammfunktion mit Bedingung: $f(x) = 2x$, $F(1) = 5$.
$F(x) = x^2 + C$, $1 + C = 5 \Rightarrow C = 4$.

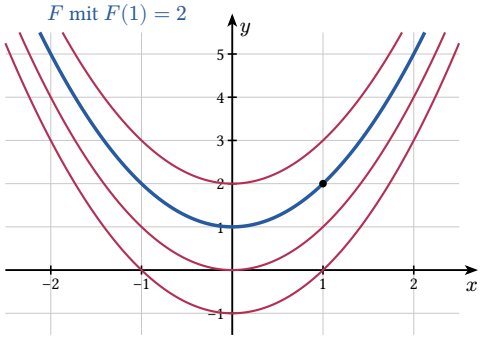


Abbildung 30: Stammfunktionen von $2x$: $x^2 + C$. Die Bedingung $F(1) = 2$ wählt eine davon aus.

Ausprobieren: **Von f zu f' und F** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗ · **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.4 Das bestimmte Integral

Teilt man das Intervall $[a;b]$ in schmale Streifen und ersetzt jeden Streifen durch ein Rechteck, so ist die Summe der Rechtecksflächen eine Näherung der Fläche unter dem Graphen. Nimmt man jeweils den kleinsten Funktionswert, entsteht die **Untersumme**, beim größten die **Obersumme**. Werden die Streifen immer schmaler, streben beide gegen denselben Wert – das Integral. Flächen unterhalb der x-Achse zählen dabei negativ.

Definition
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist der **orientierte Flächeninhalt**: Flächen oberhalb der x-Achse zählen positiv, unterhalb negativ. Es ist der Grenzwert der Summe von Rechtecksflächen (Ober- und Untersummen) für immer feinere Unterteilung.

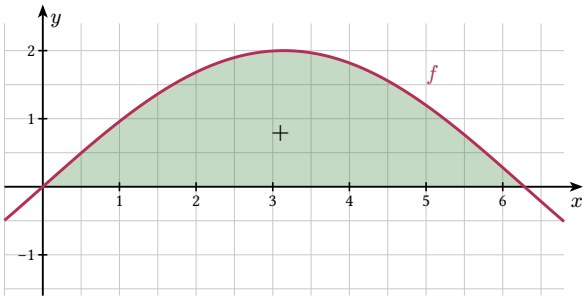
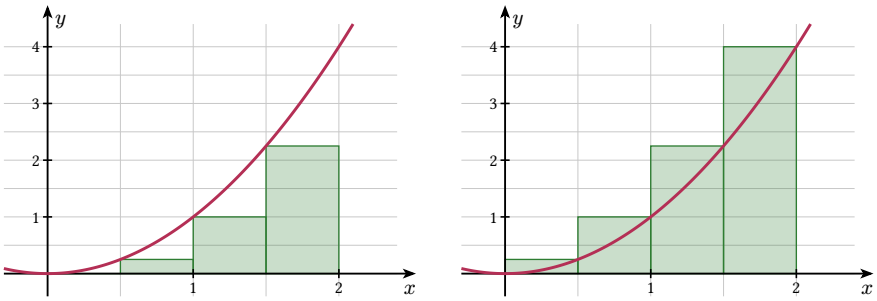


Abbildung 31: Das Integral misst die Fläche zwischen Graph und x-Achse, hier $\int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x = 8$.



Untersumme $U_4 = 1{,}75$ Obersumme $O_4 = 3{,}75$

Abbildung 32: $f(x) = x^2$ auf $[0;2]$ mit 4 Rechtecken; der genaue Wert $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ liegt dazwischen. Bei immer feinerer Unterteilung streben U_n und O_n gegen denselben Wert.

Beispiel 50

Herleitung von $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x$ über die Obersumme Zusatz. Man teilt $[0;b]$ in n Streifen der Breite $\frac{b}{n}$. Das k-te Rechteck hat die Höhe $\left(k\frac{b}{n}\right)^2$:

$$O_n = \frac{b}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dabei wurde die Summenformel $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ benutzt (für $n=3$: $1+4+9=14=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$). Für $n\to\infty$ strebt $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$ gegen 2, also

$$\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{b^3}{3}.$$

Für $b=2$ ergibt das $\frac{8}{3}$ – und $\frac{b^3}{3}$ ist genau eine Stammfunktion von x^2, ausgewertet zwischen 0 und b. Das ist kein Zufall, sondern der Hauptsatz.

Integrale über Rechtecksummen auszurechnen wäre mühsam. Der Hauptsatz sagt, dass es viel einfacher geht: Man braucht nur eine Stammfunktion. Der Beweis folgt im Abschnitt 4.6.

Merksatz

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung FS

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

für jede Stammfunktion F von f (und stetiges f).

Beispiel 51

$$\int_0^{\pi}\left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi} = 2\pi^2 - 2$$

Beispiel 52

$$\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}19$$

$$\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Das zweite Integral ist null, weil sich die Flächen links (negativ) und rechts (positiv) wegen der Punktsymmetrie genau aufheben.

Satz 4.9 (Linearität und Intervalladditivität)

$$\int_a^b (kf+g)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_b^c f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x, \quad \int_b^a f\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

Beweis Mit dem Hauptsatz: Ist F Stammfunktion von f und G von g, dann ist $kF+G$ Stammfunktion von $kf+g$, also $[kF+G]_a^b = k(F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a))$. Ebenso $(F(b)-F(a)) + (F(c)-F(b)) = F(c)-F(a)$ und $F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$.

Satz 4.10 (Monotonie des Integrals)

Ist $f(x) \le g(x)$ für alle x in $[a;b]$ $(a<b)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere gilt für $m \le f(x) \le M$: $\quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$.

Beweis Die Funktion $g-f$ ist nicht negativ; ihre Integralfunktion $I(x) = \int_a^x (g-f)\,\mathrm{d}t$ hat die Ableitung $g-f \ge 0$ und ist deshalb monoton wachsend (Monotoniesatz). Also $I(b) \ge I(a) = 0$, und mit der Linearität folgt die Behauptung. Die zweite Aussage ist der Spezialfall mit den konstanten Funktionen m und M – genau diese Abschätzung steckt im Beweis des Hauptsatzes.

Ausprobieren: **Integralgrenzen ziehen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.5 Integralfunktion

Bei der Integralfunktion ist die obere Grenze variabel: $I_a(x)$ gibt an, wie viel orientierte Fläche sich zwischen a und x angesammelt hat. Im Sachzusammenhang ist das der Bestand, der seit dem Zeitpunkt a hinzugekommen ist. Die Ableitung von I_a ist wieder f – das ist der Inhalt des Hauptsatzes.

Definition

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Es gilt $I_a(a) = 0$ und $I_a'(x) = f(x)$ FS: Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion.

Wichtig

Nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion: $F(x) = x^2+1$ ist Stammfunktion von $2x$, hat aber keine Nullstelle – eine Integralfunktion I_a hat immer die Nullstelle a.

Beispiel 53

$I_1(x) = \int_1^x 3t^2\,\mathrm{d}t = [t^3]_1^x = x^3 - 1$. Probe: $I_1(1) = 0$ und $I_1'(x) = 3x^2$.

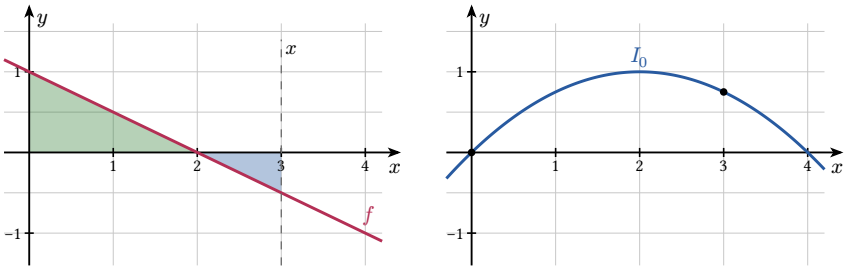


Abbildung 33: Links $f(t) = 1 - \frac{t}{2}$, rechts die Integralfunktion $I_0(x) = x - \frac{x^2}{4}$: Sie steigt, solange $f > 0$ ist, hat bei der Nullstelle von f ihr Maximum und fällt danach, weil Fläche unter der Achse abgezogen wird.

Ausprobieren: **Integralgrenzen ziehen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.6 Der Hauptsatz und sein Beweis

Der Hauptsatz ist das Herzstück der Analysis. Er verbindet zwei Fragen, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben: die nach der Steigung einer Kurve (Ableitung) und die nach der Fläche unter einer Kurve (Integral). Der Beweis kommt in zwei Schritten. Zuerst zeigt man, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist; daraus folgt dann die Rechenregel mit $F(b) - F(a)$.

Satz 4.11 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Teil 1: Ist f stetig, so ist die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar, und es gilt

$$I_a'(x) = f(x).$$

Teil 2: Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

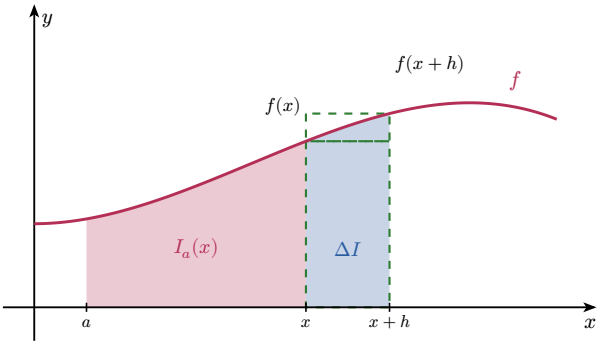


Abbildung 34: Beweisidee: Wächst die obere Grenze von x auf $x + h$, kommt der rote Streifen ΔI hinzu. Er liegt zwischen dem kleinen Rechteck $h \cdot f(x)$ und dem großen Rechteck $h \cdot f(x + h)$ (grün gestrichelt).

Beweis von Teil 1 Der Zuwachs der Integralfunktion von x bis $x + h$ ist die Fläche des schmalen Streifens:

$$I_a(x+h) - I_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sei m der kleinste und M der größte Funktionswert von f auf $[x; x + h]$. Der Streifen ist mindestens so groß wie das Rechteck mit der Höhe m und höchstens so groß wie das mit der Höhe M:

$$m \cdot h \le I_a(x+h) - I_a(x) \le M \cdot h \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \le M.$$

Für $h \to 0$ schrumpft das Intervall $[x; x + h]$ auf den Punkt x. Weil f stetig ist (keine Sprünge), streben m und M beide gegen $f(x)$ – und der Differenzenquotient, der dazwischen eingeklemmt ist, auch. Also $I_a'(x) = f(x)$. (Für $h < 0$ geht es genauso.) ∎

Beweis von Teil 2 Nach Teil 1 ist I_a eine Stammfunktion von f. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante, also $F(x) = I_a(x) + C$. Wegen $I_a(a) = 0$ ist $C = F(a)$, also $I_a(x) = F(x) - F(a)$. Für $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_a(b) = F(b) - F(a).$$

Wichtig

Teil 1 sagt: **Integrieren und Differenzieren heben sich auf.** Wer die Fläche unter dem Graphen „mitlaufen“ lässt, erhält eine Funktion, deren Steigung an jeder Stelle gerade die Höhe des Graphen ist. Das ist auch anschaulich klar: Je höher der Graph bei x, desto schneller wächst die angesammelte Fläche.

Ausprobieren: **Von f zu f' und F ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Differentialrechnung ↗** · **Integralrechnung & Hauptsatz ↗**

4.7 Vom Graphen von f zum Graphen von F

Eine typische Aufgabe des Teils A: Gegeben ist ein Graph, gesucht ist der Graph einer Stammfunktion oder der Ableitung – ohne Funktionsterm. Man liest Nullstellen, Extremstellen und Vorzeichen ab und übersetzt sie mit der folgenden Tabelle. Dieselbe Tabelle gilt für das Paar f' und f und für f'' und f'.

Merksatz

f	F (Stammfunktion)
$f > 0$	F steigt
$f < 0$	F fällt
Nullstelle mit VZW	Extremstelle
Extremstelle	Wendestelle
Nullstelle ohne VZW	Sattelstelle

Gleiche Tabelle für f' und f.

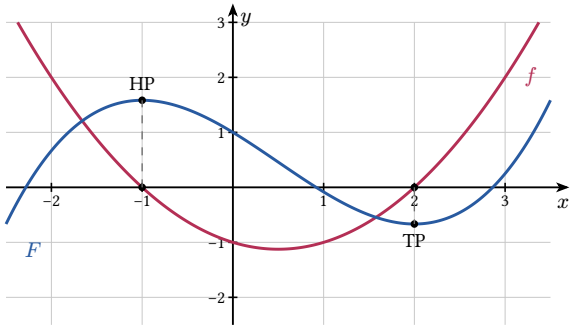


Abbildung 35: Nullstellen von f mit Vorzeichenwechsel sind Extremstellen von F: Bei -1 wechselt f von $+$ nach $-$ (Hochpunkt von F), bei 2 von $-$ nach $+$ (Tiefpunkt).

Ausprobieren: **Von f zu f' und F ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Differentialrechnung ↗** · **Integralrechnung & Hauptsatz ↗**

4.8 Flächenberechnung

Das Integral liefert den **orientierten** Flächeninhalt; Flächen unter der Achse heben Flächen über der Achse teilweise auf. Für den tatsächlichen Flächeninhalt muss man deshalb an den Nullstellen trennen und Beträge addieren. Bei der Fläche zwischen zwei Graphen integriert man die Differenz „oben minus unten“ zwischen den Schnittstellen – wo die Graphen liegen, ist dabei egal, auch unterhalb der Achse.

Vorgehen

Fläche zwischen Graph und x-Achse:

a) Nullstellen im Intervall bestimmen,
b) getrennt integrieren,
c) Beträge addieren.

Beispiel 54

$f(x) = x^2 - 1$ auf $[0;2]$: Nullstelle $x = 1$.

$$\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}, \quad \int_1^2 f\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \quad \left(\text{aber } \int_0^2 f\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\right)$$

Vorgehen

Fläche zwischen zwei Graphen:

a) Schnittstellen aus $f(x) = g(x)$,

b) $A = |\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x|$, bei mehreren Schnittstellen stückweise.

Warum „oben minus unten“ auch unter der Achse gilt Liegen beide Graphen über der x-Achse, ist die Fläche dazwischen die Fläche unter f minus die Fläche unter g, also $\int (f-g)\,\mathrm{d}x$. Verschiebt man beide Graphen um dieselbe Strecke c nach oben, ändert sich die Fläche dazwischen nicht – und die Differenz $(f+c)-(g+c) = f-g$ auch nicht. Deshalb darf man die Lage der Achse vergessen; es zählt nur, welcher Graph oben liegt.

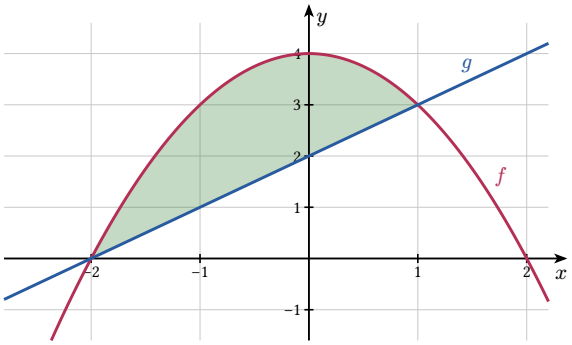


Abbildung 36: Fläche zwischen $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x + 2$ zwischen den Schnittstellen -2 und 1.

Beispiel 55

$f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x + 2$: $4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$.

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

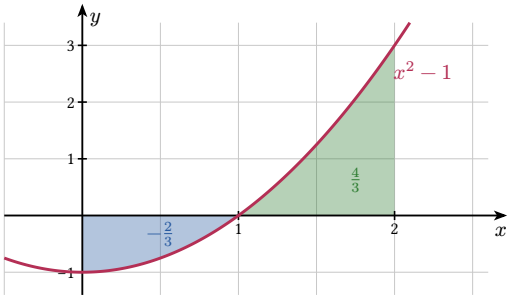


Abbildung 37: Das Integral von 0 bis 2 ist $-\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, die Fläche aber $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

Typischer Fehler

Falsch: Die Fläche zwischen Graph und x-Achse als ein einziges Integral über das ganze Intervall berechnen, auch wenn der Graph dazwischen die Achse schneidet.

Richtig: Zuerst die Nullstellen bestimmen, über jedes Teilintervall einzeln integrieren und die Beträge addieren.

Das Integral zählt Flächen unterhalb der Achse negativ: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$, die Fläche ist aber 4.

Ausprobieren: **Integralgrenzen ziehen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.9 Rotationskörper

Dreht man den Graphen von f um die x-Achse, entsteht ein Körper, dessen Querschnitte Kreise mit dem Radius $f(x)$ sind. Jede dünne Scheibe hat das Volumen $\pi(f(x))^2 \cdot \Delta x$; summiert man sie auf, entsteht das Integral der Formel. So berechnet man die Volumina von Vasen, Gläsern oder Fässern.

Satz 4.12 (Volumen von Rotationskörpern)
Rotiert der Graph von f über $[a;b]$ um die x-Achse, so entsteht ein Körper mit dem Volumen FS

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

Herleitung Man zerlegt den Körper in n dünne Scheiben der Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die Scheibe an der Stelle x_k ist näherungsweise ein Zylinder mit dem Radius $f(x_k)$, also mit dem Volumen $\pi(f(x_k))^2 \cdot \Delta x$. Die Summe

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_k))^2 \cdot \Delta x$$

ist eine Rechtecksumme für die Funktion πf^2; für $n \to \infty$ wird daraus das Integral – genauso wie beim Flächeninhalt. ∎

Beispiel 56
$f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0;4]$: $V = \pi \int_0^4 x \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$.

Beispiel 57
Herleitung der Kegelformel. Ein Kegel mit Radius r und Höhe h entsteht, wenn die Strecke $f(x) = \frac{r}{h}x$ über $[0;h]$ rotiert:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Genauso liefert der Halbkreis $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ über $[-r;r]$ das Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

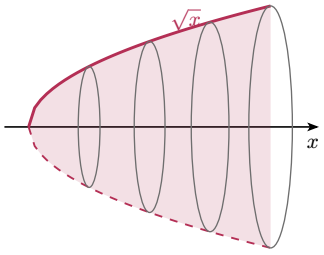


Abbildung 38: Rotation von $\sqrt{x}$ auf $[0;4]$: Die Querschnitte sind Kreise mit Radius $\sqrt{x}$, $V = 8\pi$.

Ausprobieren: **Rotationskörper** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.10 Bestand und Änderungsrate

In Sachaufgaben ist meist nicht der Bestand selbst gegeben, sondern seine Änderungsrate: Zufluss pro Minute, Geschwindigkeit, Wachstumsrate. Das Integral der Rate über einen Zeitraum ist die Bestandsänderung in diesem Zeitraum – die Fläche unter dem Graphen der Rate. Der Bestand ist am größten, wenn die Rate von positiv auf negativ wechselt.

Merksatz
Ist $r(t)$ die Änderungsrate eines Bestands B, so ist

$$B(t) = B(0) + \int_0^t r(s) \,\mathrm{d}s$$

Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} r(t) \,\mathrm{d}t$ ist die **Änderung** des Bestands zwischen t_1 und t_2 (Einheit: Einheit von r mal Zeiteinheit).

Beispiel 58
Zufluss $r(t) = 2t$ in Liter pro Minute, anfangs 10 Liter: nach 3 Minuten sind es $10 + \int_0^3 2t\,\mathrm{d}t = 10 + 9 = 19$ Liter.

Begründung Der Bestand B ist eine Stammfunktion der Rate, denn $B' = r$. Nach dem Hauptsatz ist $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,\mathrm{d}t = B(t_2) - B(t_1)$ – die Bestandsänderung. Anschaulich: Ist die Rate in einem kurzen Zeitraum Δt ungefähr konstant, kommt $r \cdot \Delta t$ hinzu (ein schmales Rechteck); die Summe aller Rechtecke ist das Integral.

Beispiel 59
In einen Teich fließt Wasser mit der Rate $r(t) = 6 - 2t$ (in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$). Bis $t = 3$ ist $r > 0$, der Wasserstand steigt; danach fließt mehr ab als zu. Die größte Wassermenge ist bei $t = 3$ erreicht. Zuwachs bis dahin: $\int_0^3 (6 - 2t)\,\mathrm{d}t = \left[6t - t^2\right]_0^3 = 9\mathrm{m}^3$.

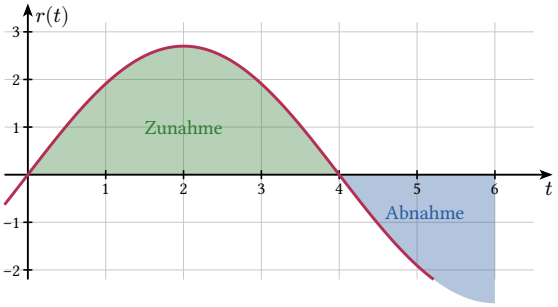


Abbildung 39: Positive Rate: Bestand wächst; negative Rate: Bestand nimmt ab. Bei $t = 4$ ist der Bestand am größten.

Ausprobieren: **Bestand und Änderungsrate** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Integralrechnung & Hauptsatz** ↗

4.11 Mittelwert und uneigentliche Integrale nicht im Abi 2027

Merksatz
Mittelwert einer Funktion auf $[a; b]$ nicht im Abi 2027

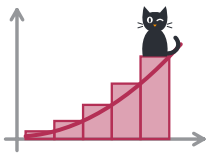
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Begründung m ist die Höhe des Rechtecks über $[a; b]$, das denselben Flächeninhalt hat wie die Fläche unter dem Graphen: $m \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Für stetiges f wird dieser Wert auch angenommen (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Merksatz
Uneigentliche Integrale nicht im Abi 2027

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1$$

Zur Vertiefung: **Aufgabe 23** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 24** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 25** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 26** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 27** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 28** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 29** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 30** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 31** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 32** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 33** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 34** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 35** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 36** (in der Sammlung Abi-ähnlich).



5 Kurven untersuchen

Eine Kurvenuntersuchung beantwortet die Frage: Wie sieht der Graph aus, und wo sind seine besonderen Punkte? Im Abitur wird selten eine vollständige „Kurvendiskussion“ verlangt, sondern gezielte Teilfragen – die Extrempunkte, die stärkste Zunahme, eine Tangente, ein Flächeninhalt. Dafür muss man wissen, welches Werkzeug welche Frage beantwortet: Nullstellen von f für Achsenschnitte, von f' für waagrechte Tangenten, von f'' für Wendestellen.

5.1 Definitionsbereich und Achsenschnittpunkte

Bevor man rechnet, klärt man, wo die Funktion überhaupt definiert ist. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist immer am leichtesten: einfach $x = 0$ einsetzen. Für die Nullstellen braucht man die Verfahren aus dem Kapitel Gleichungen.

Merksatz

Ausschließen: Nenner $= 0$, negative Zahlen unter der Wurzel, ln von Zahlen ≤ 0.

- ***y*-Achse:** $x = 0$ einsetzen: $S_y(0 \mid f(0))$.
- **Nullstellen:** $f(x) = 0$ lösen (Kapitel Gleichungen).

Beispiel 60

$f(x) = x \cdot \ln(x)$: ln verlangt $x > 0$, also $D_f = \mathbb{R}^+$ – es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. Nullstellen: $x \ln(x) = 0$; $x = 0$ liegt nicht in D_f, bleibt $\ln(x) = 0$, also $x = 1$.

Üben: **noctua** ↗

5.2 Grenzverhalten und Asymptoten

Das Verhalten für sehr große und sehr kleine x bestimmt den Verlauf des Graphen „außen“. Bei Produkten mit e^x oder e^{-x} gewinnt immer die Exponentialfunktion: $x^3 \cdot e^{-x}$ geht für $x \to \infty$ gegen 0, obwohl x^3 wächst. Eine waagrechte Asymptote ist ein Grenzwert, eine senkrechte entsteht dort, wo der Nenner null wird.

Merksatz

Verhalten für $x \to \pm\infty$ und an den Rändern von D_f untersuchen: Welcher Summand bzw. Faktor dominiert? (e^x schlägt jede Potenz.)

Beispiel 61

$f(x) = (2 - 3x)e^{-x}$: für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$), für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.

Beispiel 62

$g(x) = 3 - 2e^{-0{,}5x}$: Für $x \to \infty$ geht $e^{-0{,}5x} \to 0$, also $g(x) \to 3$ (Asymptote $y = 3$). Für $x \to -\infty$ wächst $e^{-0{,}5x}$ über alle Grenzen, also $g(x) \to -\infty$. Solche Funktionen beschreiben beschränktes Wachstum (Kapitel Wachstum).

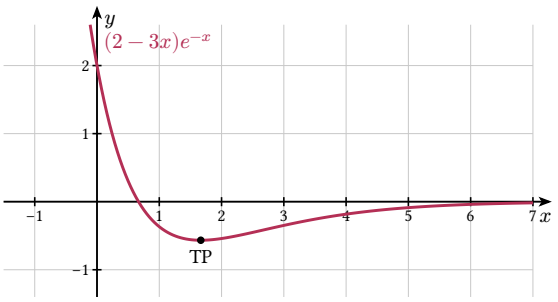


Abbildung 40: Für $x \to \infty$ nähert sich der Graph der x-Achse (Asymptote $y = 0$); für $x \to -\infty$ wächst er über alle Grenzen.

Ausprobieren: **Asymptoten und gebrochenrationale Funktionen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗ · **Folgen, Grenzwert & Stetigkeit** ↗

5.3 Stetigkeit und Zwischenwertsatz

Im Abitur heißt es oft: „Begründen Sie, dass die Gleichung eine Lösung hat“ oder „… genau eine Nullstelle“. Ausrechnen lässt sich die Lösung dabei meist nicht. Man zeigt nur, dass es sie gibt. Das Werkzeug dafür ist der Zwischenwertsatz, für „genau eine“ zusammen mit der Monotonie.

Definition

f heißt an der Stelle x_0 **stetig**, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ – anschaulich: Der Graph hat dort keinen Sprung und kein Loch. Jede differenzierbare Funktion ist stetig; umgekehrt nicht: $|x|$ ist bei 0 stetig, hat dort aber einen Knick und ist nicht differenzierbar.

Satz 5.1 (Zwischenwertsatz)

Ist f auf $[a; b]$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so hat f dazwischen mindestens eine Nullstelle. Ist f dort zusätzlich streng monoton, ist es genau eine.

Begründung Ein Graph ohne Sprung, der unterhalb der x-Achse beginnt und oberhalb endet, muss die Achse irgendwo kreuzen – man kann ihn „in einem Zug“ zeichnen. Ein strenger Beweis braucht die Vollständigkeit der reellen Zahlen (es gibt keine „Lücken“ wie bei $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$, Satz Satz 1.1) und geht über die Schule hinaus. Bei strenger Monotonie kann der Graph die Achse nicht ein zweites Mal treffen.

Beispiel 63

$f(x) = x^3 + x - 1$: $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Also genau eine Nullstelle, und sie liegt in $]0; 1[$.

Beispiel 64

Schnittpunkt zweier Graphen. Hat die Gleichung $e^x = 3 - x$ eine Lösung? Man bringt alles auf eine Seite: $h(x) = e^x + x - 3$. Es ist $h(0) = -2 < 0$ und $h(1) = e - 2 > 0$, und h ist stetig. Also hat h in $]0; 1[$ eine Nullstelle. Wegen $h'(x) = e^x + 1 > 0$ ist es genau eine: Die Graphen von e^x und $3 - x$ schneiden sich genau einmal.

Typischer Fehler

Falsch: Aus $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$ schließen, dass f in $]0; 2[$ **genau eine** Nullstelle hat.

Richtig: Der Vorzeichenwechsel sichert nur **mindestens eine** Nullstelle. Für „genau eine“ braucht man zusätzlich die strenge Monotonie, etwa $f'(x) > 0$ auf dem Intervall. Und f muss dort stetig sein: $f(x) = \frac{1}{x}$ wechselt zwischen -1 und 1 das Vorzeichen, hat aber keine Nullstelle.

Satz 5.2 (Differenzierbar heißt stetig Zusatz**)**

Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Beweis Für $h \neq 0$ ist

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Für $h \to 0$ strebt der Bruch gegen die Zahl $f'(x_0)$ und der Faktor h gegen 0; das Produkt geht also gegen $f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Damit ist $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Die Umkehrung gilt nicht, wie $|x|$ bei 0 zeigt. ∎

Ausprobieren: **Stetigkeit und Zwischenwertsatz** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Folgen, Grenzwert & Stetigkeit** ↗ · **Numerische Grundverfahren** ↗

5.4 Monotonie

Wo die Ableitung positiv ist, steigt der Graph; wo sie negativ ist, fällt er. Die Monotonieintervalle liest man deshalb an den Vorzeichen von f' ab – zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von f' ändert sich das Vorzeichen nicht, ein Testwert genügt.

Satz 5.3 (Monotoniesatz)

- $f'(x) > 0$ auf einem Intervall $\Rightarrow$ f streng monoton **wachsend**,
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f streng monoton **fallend**.

Dieser **Monotoniesatz** ist anschaulich klar: Wenn der Graph überall bergauf zeigt, kann er nirgends fallen. Für einen Beweis braucht man einen Satz, der die Steigung einer Sekante mit einer Tangentensteigung verbindet.

Satz 5.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung Zusatz)

Ist f auf $[a;b]$ differenzierbar, so gibt es eine Stelle c zwischen a und b, an der die Tangente parallel zur Sekante ist:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

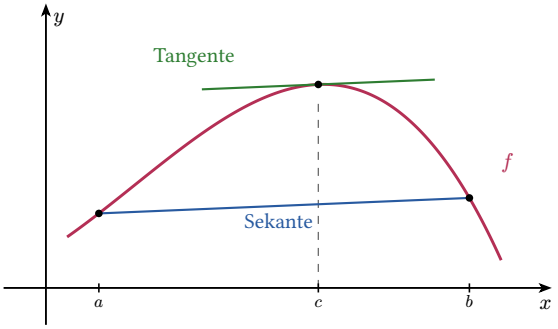


Abbildung 41: Mittelwertsatz: Verschiebt man die Sekante parallel, bis sie den Graphen gerade noch berührt, erhält man eine Tangente mit derselben Steigung.

Beweis des Monotoniesatzes (mit dem Mittelwertsatz) Sei $f' > 0$ auf einem Intervall und seien $x_1 < x_2$ zwei Stellen darin. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein c dazwischen mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

Der Nenner ist positiv, also auch der Zähler: $f(x_2) > f(x_1)$. Für $f' < 0$ folgt ebenso $f(x_2) < f(x_1)$, und für $f' = 0$ folgt $f(x_2) = f(x_1)$ – eine Funktion mit Ableitung null ist konstant. ∎

Wichtig

Die Umkehrung gilt nicht: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, obwohl $f'(0) = 0$ ist. Einzelne Stellen mit $f' = 0$ stören die Monotonie nicht.

Beispiel 65

$f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Nullstellen von f': 0 und 2. Testwerte: $f'(-1) = 9 > 0$, $f'(1) = -3 < 0$, $f'(3) = 9 > 0$.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	steigt	HP	fällt	TP	steigt

f ist auf $]-\infty;0]$ und $[2;\infty[$ streng monoton wachsend, auf $[0;2]$ streng monoton fallend.

Ausprobieren: **Von f zu f' und F ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Differentialrechnung ↗** · **Integralrechnung & Hauptsatz ↗**

5.5 Extrempunkte

An einem Hoch- oder Tiefpunkt ist die Tangente waagrecht – das ist die **notwendige** Bedingung $f'(x_0) = 0$. Sie reicht aber nicht aus, denn auch ein Sattelpunkt hat eine waagrechte Tangente. Erst ein Vorzeichenwechsel der Ableitung (oder eine von null verschiedene zweite Ableitung) sichert das Extremum. Im Sachzusammenhang fragt man meist nach dem **größten** Wert in einem Zeitraum – dann gehören die Ränder dazu.

Satz 5.5 (Kriterien für Extremstellen)
Notwendig: $f'(x_0) = 0$.
Hinreichend: zusätzlich
- $f''(x_0) < 0$: Hochpunkt, $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt, **oder**
- f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen (von $+$ nach $-$: Hochpunkt).

Ist $f''(x_0) = 0$, hilft nur das Vorzeichenwechsel-Kriterium.

Beweis der notwendigen Bedingung Hat f bei x_0 einen Hochpunkt, so ist $f(x_0 + h) \le f(x_0)$ für alle kleinen h. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hat also für $h > 0$ einen Zähler ≤ 0 und ist ≤ 0, für $h < 0$ ist er ≥ 0. Beide einseitigen Grenzwerte sind gleich $f'(x_0)$; also ist $f'(x_0) \le 0$ und $f'(x_0) \ge 0$, d. h. $f'(x_0) = 0$. Für Tiefpunkte genauso. ∎

Warum die Kriterien funktionieren **Vorzeichenwechsel:** Wechselt f' bei x_0 von $+$ nach $-$, dann steigt f links von x_0 und fällt rechts davon (Monotoniesatz). Also ist $f(x_0)$ größer als alle Werte in der Nähe – ein Hochpunkt.
Zweite Ableitung: Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist f' bei x_0 streng monoton fallend. Eine fallende Funktion, die bei x_0 den Wert 0 hat, ist links davon positiv und rechts davon negativ – das ist der Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Anschaulich: Der Graph ist rechtsgekrümmt, eine waagrechte Tangente an einer Rechtskurve gehört zu einem Gipfel.

Beispiel 66
$f(x) = xe^{-x}$: $f'(x) = (1 - x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$ (der Faktor e^{-x} ist nie null).
$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$, $f''(1) = -e^{-1} < 0$: Hochpunkt $H\left(1 \mid \frac{1}{e}\right)$.

Beispiel 67

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad f'(x) = x^2 - 1, \quad f''(x) = 2x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f''(-1) = -2 < 0$: Hochpunkt $H\left(-1 \mid \frac{2}{3}\right)$; $f''(1) = 2 > 0$: Tiefpunkt $T\left(1 \mid -\frac{2}{3}\right)$.

Wichtig
Globales Maximum auf einem Intervall: auch die Randwerte prüfen!

Typischer Fehler
Notwendig heißt: ohne diese Bedingung geht es nicht – sie reicht aber nicht. $f(x) = x^3$ hat $f'(0) = 0$, aber keine Extremstelle (Sattelpunkt). **Hinreichend** heißt: wenn sie erfüllt ist, liegt sicher ein Extremum vor – sie muss aber nicht erfüllt sein: $f(x) = x^4$ hat bei 0 einen Tiefpunkt, obwohl $f''(0) = 0$ ist.

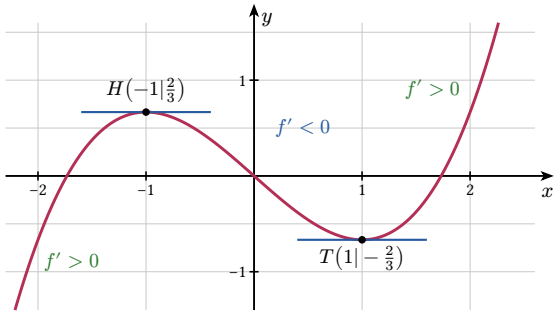


Abbildung 42: Waagrechte Tangenten an den Extrempunkten; dazwischen wechselt f' das Vorzeichen.

Ausprobieren: **Von f zu f' und F ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Differentialrechnung ↗** · **Integralrechnung & Hauptsatz ↗**

5.6 Wendepunkte und Krümmung

Fährt man den Graphen von links nach rechts mit dem Fahrrad entlang, so lenkt man bei einer Linkskurve nach links, bei einer Rechtskurve nach rechts. Der Punkt, an dem man umlenkt, ist der Wendepunkt. Dort ist die Steigung extremal – im Sachzusammenhang ist das der Zeitpunkt der **stärksten Zunahme** oder **Abnahme**, eine der häufigsten Abiturfragen.

Definition

$f''(x) > 0$: Graph **linksgekrümmt** (Kurve nach links, „Tal“).
$f''(x) < 0$: **rechtsgekrümmt**.
Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt, in dem sich die Krümmung ändert; dort ist die Steigung extremal.

Satz 5.6 (Kriterien für Wendestellen)

Notwendig: $f''(x_0) = 0$. **Hinreichend:** zusätzlich $f'''(x_0) \neq 0$ oder Vorzeichenwechsel von f''.
Ist dazu $f'(x_0) = 0$, liegt ein **Sattelpunkt** vor.

Begründung Wendestellen sind die Extremstellen der Ableitung f' – dort ist der Graph am steilsten bzw. am flachsten. Wendet man die Kriterien für Extremstellen auf f' an, erhält man genau die Bedingungen oben: $(f')' = f'' = 0$ notwendig, $(f')'' = f''' \neq 0$ oder ein Vorzeichenwechsel von f'' hinreichend.

Beispiel 68

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, $f'''(x) = 6 \neq 0$. Wendepunkt $W(1 \mid 0)$.
Wendetangente: $f'(1) = 3 - 6 = -3$, also $y = -3(x-1) + 0 = -3x + 3$. Weil $f'' < 0$ links und $f'' > 0$ rechts von 1 ist, geht der Graph dort von einer Rechts- in eine Linkskurve über; an dieser Stelle fällt er am stärksten.

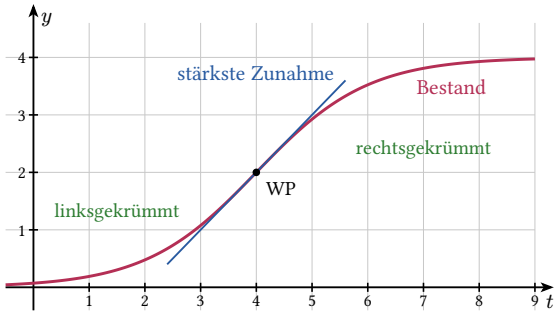


Abbildung 43: Im Wendepunkt geht Links- in Rechtskrümmung über; die Wendetangente ist am steilsten.

Typischer Fehler

Falsch: $f''(x_0) = 0$, also ist x_0 eine Wendestelle.
Richtig: Die Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend: $f(x) = x^4$ hat $f''(0) = 0$ und keinen Wendepunkt. Hinreichend ist ein Vorzeichenwechsel von f'' bei x_0 oder $f''(x_0) = 0$ zusammen mit $f'''(x_0) \neq 0$.

Ausprobieren: **Krümmung und Wendepunkt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Extremwerte & Optimierung** ↗

5.7 Funktion und Ableitungen

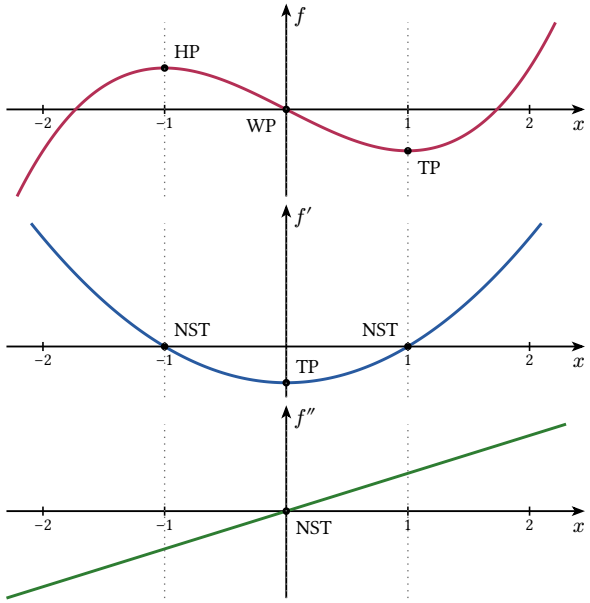


Abbildung 44: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ und ihre Ableitungen untereinander: Extremstellen von f sind Nullstellen von f', die Wendestelle von f ist Extremstelle von f' und Nullstelle von f''.

Merksatz

f	f'	f''
Hochpunkt	NST $+ \to -$	< 0
Tiefpunkt	NST $- \to +$	> 0
Wendepunkt	Extremum	NST mit VZW
steigt	> 0	
linksgekrümmt	steigt	> 0

Ausprobieren: **Tangente an einer Kurve** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗

5.8 Tangente und Normale

Die Tangente ist die Gerade, die den Graphen in einem Punkt berührt und dort dieselbe Steigung hat. Man braucht also nur zwei Zutaten: den Punkt $(u|f(u))$ und die Steigung $f'(u)$. Die Normale steht im selben Punkt senkrecht auf der Tangente. Schwieriger wird es, wenn der Berührpunkt unbekannt ist – dann setzt man ihn als Variable u an.

Satz 5.7 (Tangente und Normale)
Tangente an G_f im Punkt $P(u \mid f(u))$:

$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Normale (senkrecht zur Tangente, $f'(u) \neq 0$):

$$n : y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

Begründung Eine Gerade mit Steigung m durch den Punkt $(u \mid v)$ hat die Gleichung $y = m(x - u) + v$: Für $x = u$ ergibt sie v, und jeder Schritt nach rechts erhöht y um m (**Punkt-Steigungs-Form**). Die Tangente hat die Steigung $f'(u)$, die Normale nach der Senkrecht-Regel $-\frac{1}{f'}(u)$.

Beispiel 69
$f(x) = x^2$, $u = 3$: $t : y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$,
$n : y = -\frac{1}{6}(x - 3) + 9$.

Vorgehen

Tangente durch einen Punkt Q außerhalb des Graphen: allgemeine Tangentengleichung mit u aufstellen, Q einsetzen, nach u auflösen.

Beispiel 70

$f(x) = x^2$, $Q(0 \mid -1)$: $-1 = 2u(0-u) + u^2 = -u^2 \Rightarrow u = \pm 1$.

Tangenten $y = 2x - 1$ und $y = -2x - 1$.

Vorgehen

Tangente mit vorgegebener Steigung m: $f'(u) = m$ lösen, dann wie oben.

Merksatz

Zwei Graphen **berühren** sich in einem Punkt, wenn sie ihn gemeinsam haben **und** dort die gleiche Steigung. Sie **schneiden sich senkrecht**, wenn das Produkt der Steigungen -1 ist. FS

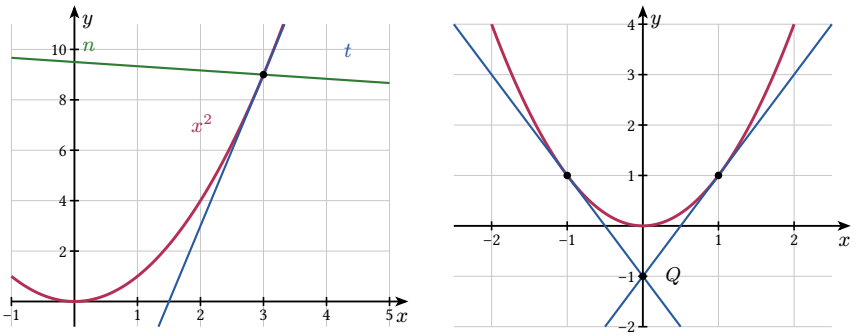


Abbildung 45: Links Tangente und Normale in $(3|9)$; rechts die beiden Tangenten von $Q(0|-1)$ aus an die Parabel.

Typischer Fehler

Falsch: Als Steigung der Tangente im Punkt $P(u \mid f(u))$ den Funktionswert $f(u)$ nehmen.

Richtig: Die Steigung ist $f'(u)$: $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$. Die Normale hat die Steigung $-\frac{1}{f'(u)}$.

Ausprobieren: **Tangente an einer Kurve** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗

5.9 Funktionsterm aus Eigenschaften

Bei einer „Steckbriefaufgabe“ ist nicht die Funktion gegeben, sondern Eigenschaften ihres Graphen: ein Punkt, ein Extrempunkt, eine Wendetangente. Jede Eigenschaft liefert eine Gleichung für die unbekannten Koeffizienten. Man braucht so viele Gleichungen wie Unbekannte; Symmetrie spart dabei Koeffizienten.

Vorgehen

a) Ansatz mit passendem Grad (Symmetrie nutzen: nur gerade bzw. ungerade Exponenten),

b) jede Eigenschaft als Gleichung,

c) lineares Gleichungssystem lösen (Gaußverfahren).

Beispiel 71

Ganzrational, Grad 3, punktsymmetrisch zum Ursprung, Hochpunkt $H(1|2)$:

$f(x) = ax^3 + bx$, $f'(x) = 3ax^2 + b$.

$$f(1) = 2 : a + b = 2$$

$$f'(1) = 0 : 3a + b = 0$$

$\Rightarrow a = -1, b = 3$: $f(x) = -x^3 + 3x$.

Wichtige Übersetzungen von Eigenschaften in Gleichungen:

Eigenschaft	Gleichung(en)
Punkt $P(2 \mid 5)$ liegt auf G_f	$f(2) = 5$
Extrempunkt in $x = 1$	$f'(1) = 0$

Wendepunkt in $x = 1$	$f''(1) = 0$
Tangente in $x = 0$ hat Steigung 3	$f'(0) = 3$
berührt die x-Achse in $x = 4$	$f(4) = 0$ und $f'(4) = 0$
Sattelpunkt in $x = 0$	$f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$

Beispiel 72

Parabel durch $A(0 \mid 1)$, $B(1 \mid 0)$, $C(2 \mid 3)$. Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(0) = 1 : c = 1, \quad f(1) = 0 : a + b + 1 = 0, \quad f(2) = 3 : 4a + 2b + 1 = 3$$

Aus der zweiten Gleichung $b = -1 - a$, eingesetzt in die dritte: $4a - 2 - 2a = 2 \Rightarrow a = 2$, $b = -3$. Also $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Bei drei und mehr Unbekannten hilft das Gaußverfahren (ML2 **Kapitel Lineare Gleichungssysteme**).

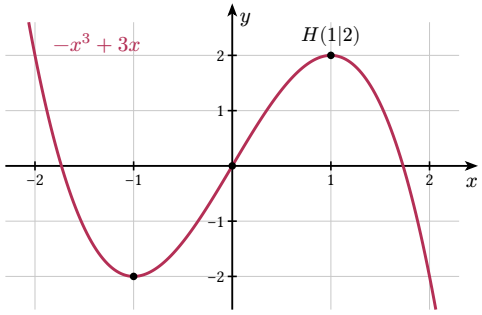


Abbildung 46: Grad 3, punktsymmetrisch, Hochpunkt $H(1|2)$ – die Lösung aus dem Beispiel.

Ausprobieren: **Funktionsterm aus Eigenschaften** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Extremwerte & Optimierung** ↗ · **Lineare Gleichungssysteme & Gauß** ↗

5.10 Extremwertprobleme

Bei Extremwertproblemen soll eine Größe möglichst groß oder klein werden: die Fläche eines Rechtecks, das Volumen einer Schachtel, der Abstand zweier Punkte. Die Schwierigkeit liegt im Aufstellen der **Zielfunktion**: Sie hängt zunächst von zwei Größen ab, die über eine **Nebenbedingung** verknüpft sind. Ersetzt man eine Größe mit der Nebenbedingung, bleibt eine Funktion einer Variablen, die man wie gewohnt untersucht.

Vorgehen

a) Zielgröße als Term mit zwei Variablen (Hauptbedingung),
b) Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und einsetzen,
c) Zielfunktion ableiten, $= 0$ setzen,
d) Art des Extremums **und Randwerte** prüfen.

Beispiel 73

Rechteck unter $f(x) = 4 - x^2$ mit Ecken $(\pm u \mid 0)$ und $(\pm u \mid f(u))$, $0 < u < 2$:

$$A(u) = 2u(4 - u^2) = 8u - 2u^3$$

$$A'(u) = 8 - 6u^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$A''(u) = -12u < 0$: Maximum, $A = \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6{,}16$. Am Rand ($u \to 0$, $u \to 2$) geht A gegen 0.

Beispiel 74

Offene Schachtel. Aus einem quadratischen Karton mit 12 cm Seitenlänge schneidet man an den Ecken Quadrate mit der Seite x aus und biegt die Ränder hoch. Für welches x wird das Volumen am größten?
Volumen: Grundfläche mal Höhe, $V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$ mit $0 < x < 6$.

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \quad V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$$

Im Inneren des Definitionsbereichs nur $x = 2$; $V''(x) = 24x - 96$, $V''(2) = -48 < 0$: Maximum. $V(2) = 8^2 \cdot 2 = 128\text{cm}^3$. An den Rändern ist $V = 0$, das Maximum ist also global.

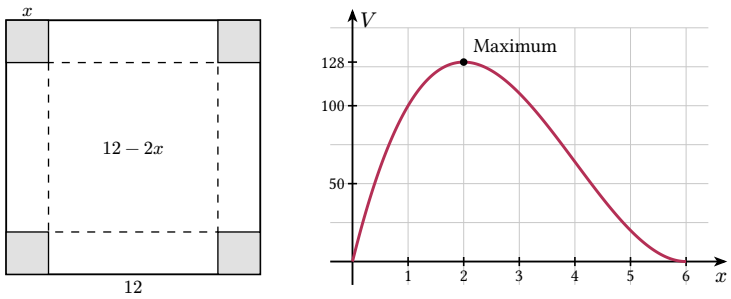


Abbildung 47: Links der Karton mit den ausgeschnittenen Ecken, rechts das Volumen $V(x)$: größtes Volumen bei $x = 2$.

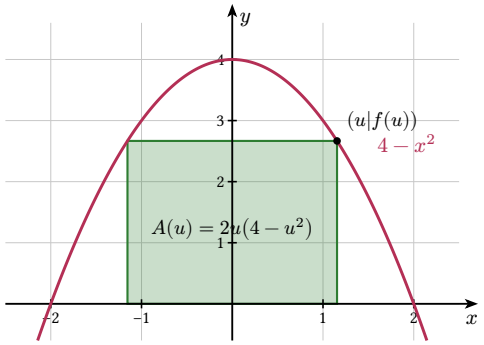


Abbildung 48: Das größte Rechteck unter der Parabel hat $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ausprobieren: **Extremwertprobleme** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Extremwerte & Optimierung** ↗

5.11 Funktionenscharen untersuchen

Bei Scharen hängt jedes Ergebnis vom Parameter ab – die Extremstelle, ihre Art, der Funktionswert. Man rechnet wie gewohnt und behandelt den Parameter wie eine Zahl, achtet aber auf Fallunterscheidungen (etwa bei $a > 0$ und $a < 0$). Eliminiert man den Parameter aus den Koordinaten eines Extrempunkts, erhält man die Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen.

Merksatz

Rechnen wie gewohnt, der Parameter ist eine feste Zahl. Fallunterscheidungen, wenn durch einen Term mit Parameter geteilt wird oder das Vorzeichen davon abhängt.

Beispiel 75

$f_a(x) = x^2 - 2ax$: $f_a'(x) = 2x - 2a = 0 \Rightarrow x = a$. Tiefpunkt $T_a(a \mid -a^2)$ für jedes a; die Tiefpunkte liegen auf der Parabel $y = -x^2$.

Beispiel 76

Schar mit Fallunterscheidung: $f_a(x) = ax^3 - 3x$ mit $a \neq 0$. $f_a'(x) = 3ax^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a}$.
Für $a < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung: Der Graph hat keine Extrempunkte. Für $a > 0$ gibt es die zwei Extremstellen $x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$. Wie viele besondere Punkte es gibt, hängt also vom Parameter ab – im Abitur lautet die Frage dann oft „Für welche Werte von a …?“.

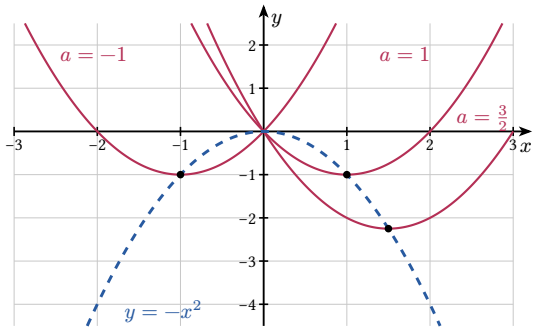
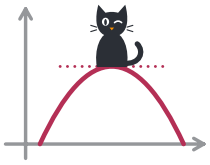


Abbildung 49: Die Tiefpunkte $T_a(a \mid -a^2)$ der Schar $f_a(x) = x^2 - 2ax$ liegen auf der Parabel $y = -x^2$.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 37** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 38** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 39** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 40** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 3** (Genau eine Nullstelle, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Funktionenscharen und Ortskurven** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Funktionsbegriff & Funktionsklassen** ↗



6 Wachstum

Wachstumsmodelle beschreiben, wie sich ein Bestand mit der Zeit ändert. Welches Modell passt, erkennt man an der Änderung: Kommt pro Zeitschritt derselbe **Betrag** hinzu, ist das Wachstum linear; wird pro Zeitschritt mit demselben **Faktor** multipliziert, ist es exponentiell; nähert sich der Bestand einer Grenze, ist es beschränkt. Im Abitur wird das Modell meist vorgegeben, und man soll Parameter bestimmen, Werte berechnen und das Ergebnis im Sachzusammenhang deuten.

Definition

Ein Bestand $B(t)$ ändert sich mit der Zeit t. Die Ableitung $B'(t)$ ist die **Änderungsrate**.

6.1 Lineares Wachstum

Merksatz

$$B(t) = B(0) + m \cdot t$$

Pro Zeitschritt kommt immer **derselbe Betrag** m hinzu: $B'(t) = m$.

Beispiel 77

Ein Sparschwein enthält 40 €; jede Woche kommen 5 € dazu: $B(t) = 40 + 5t$. Nach 10 Wochen sind es 90 €.
Kennzeichen: Die **Differenzen** aufeinanderfolgender Werte sind konstant ($45 - 40 = 50 - 45 = \ldots = 5$).

Ausprobieren: **Wachstum: linear, exponentiell, beschränkt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **e-Funktion & Wachstumsmodelle** ↗

6.2 Exponentielles Wachstum

Merksatz

$$B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$$

Pro Zeitschritt wird mit **demselben Faktor** multipliziert; die Änderungsrate ist proportional zum Bestand: $B'(t) = k \cdot B(t)$.
$k > 0$: Wachstum, $k < 0$: Abnahme (Zerfall).

Begründung Nach der Kettenregel ist $B'(t) = B(0) \cdot ke^{kt} = k \cdot B(t)$: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand. Bei Bakterien ist das plausibel – doppelt so viele Bakterien teilen sich doppelt so oft. Und in jedem Zeitschritt Δt wird mit demselben Faktor multipliziert:

$$B(t + \Delta t) = B(0)e^{kt}e^{k\Delta t} = B(t) \cdot e^{k\Delta t}.$$

Kennzeichen: Die **Quotienten** aufeinanderfolgender Werte sind konstant.

Satz 6.1 (Verdopplungs- und Halbwertszeit)

$$T_D = \frac{\ln(2)}{k}, \qquad T_H = \frac{\ln(2)}{|k|}$$

Wachstum um $p\%$ pro Zeitschritt: $e^k = 1 + \frac{p}{100}$.

Beweis Gesucht ist die Zeit T, nach der sich der Bestand verdoppelt hat, egal zu welchem Zeitpunkt t man startet:

$$B(0)e^{k(t+T)} = 2 \cdot B(0)e^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad e^{kT} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln(2)}{k}.$$

Der Startzeitpunkt t fällt heraus – die Verdopplungszeit ist bei exponentiellem Wachstum immer gleich. Für die Halbwertszeit setzt man $e^{kT} = \frac{1}{2}$ an und erhält $T = -\frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{|k|}$. ∎

Beispiel 78
Bakterien: $B(0) = 500$, nach 3 Stunden 2000.
$500e^{3k} = 2000 \Rightarrow e^{3k} = 4 \Rightarrow k = \frac{\ln(4)}{3} \approx 0{,}462$.
Verdopplungszeit $T_D = \frac{\ln(2)}{k} = 1{,}5$ h.

Satz 6.2 (Wachstumskonstante aus zwei Werten)
Kennt man den Bestand zu zwei Zeitpunkten, so ist

$$k = \frac{\ln\left(\frac{B(t_2)}{B(t_1)}\right)}{t_2 - t_1}.$$

Beweis $\frac{B(t_2)}{B(t_1)} = \frac{B(0)e^{kt_2}}{B(0)e^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)}$; Logarithmieren und Auflösen nach k. Im Beispiel: $k = \frac{\ln(\frac{2000}{500})}{3} = \frac{\ln(4)}{3}$.

Beispiel 79
Zerfall. Ein radioaktives Präparat hat die Halbwertszeit 8 Tage. Dann ist $k = -\frac{\ln(2)}{8} \approx -0{,}0866$ und $N(t) = N_0 e^{-0{,}0866t}$. Nach 20 Tagen ist noch der Anteil $e^{-0{,}0866 \cdot 20} \approx 0{,}177$, also rund 17,7%, vorhanden.

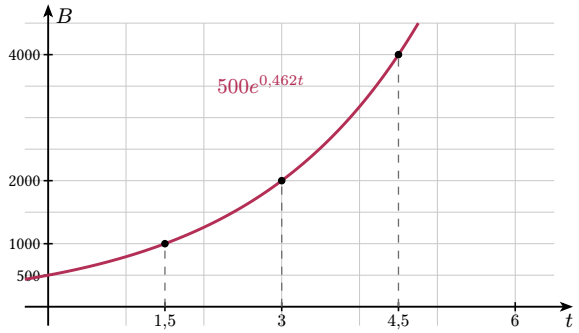


Abbildung 50: Alle 1,5 Stunden verdoppelt sich der Bestand – unabhängig vom Startzeitpunkt.

Ausprobieren: **Wachstum: linear, exponentiell, beschränkt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **e-Funktion & Wachstumsmodelle** ↗

6.3 Beschränktes Wachstum

Satz 6.3 (Beschränktes Wachstum)
Der Bestand nähert sich einer Schranke S; die Änderungsrate ist proportional zum **Sättigungsmanko** $S - B$:

$$B(t) = S - (S - B(0)) \cdot e^{-kt}, \quad k > 0$$

$$B'(t) = k \cdot (S - B(t))$$

Beweis Ableiten mit der Kettenregel:

$$B'(t) = -(S - B(0)) \cdot (-k)e^{-kt} = k(S - B(0))e^{-kt} = k(S - B(t)) \ ,$$

denn nach der Funktionsgleichung ist $S - B(t) = (S - B(0))e^{-kt}$. Je näher der Bestand an der Schranke ist, desto langsamer wächst er – deshalb erreicht er sie nie, nähert sich ihr aber beliebig: $B(t) \to S$ für $t \to \infty$.

Beispiel 80
Tee mit $90°C$ kühlt im Raum mit $20°C$ ab: $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$. Waagrechte Asymptote $y = 20$.
Nach 10 Minuten hat der Tee $55°C$: $20 + 70e^{-10k} = 55 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{10} \approx 0{,}069$.
Trinkbar bei $40°C$: $70e^{-0{,}069t} = 20 \Rightarrow t = \frac{\ln(3{,}5)}{0{,}069} \approx 18$ Minuten.

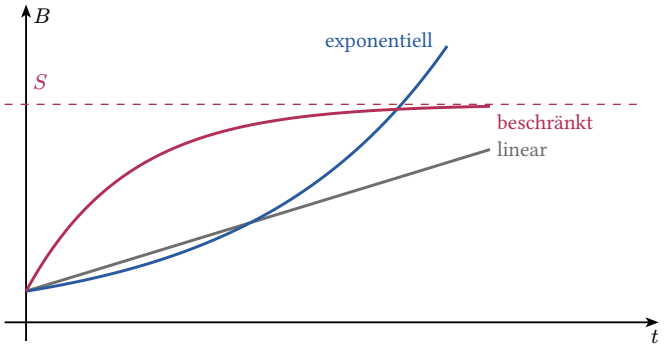


Abbildung 51: Die drei Wachstumsmodelle bei gleichem Anfangswert: linear (konstante Zunahme), exponentiell (immer schneller), beschränkt (immer langsamer, nähert sich S).

Wichtig

Differentialgleichungen stehen im Bildungsplan 2016 nicht; im Abitur kommen Wachstumsvorgänge als **Modellierung mit Exponentialfunktionen** vor.

Ausprobieren: **Wachstum: linear, exponentiell, beschränkt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **e-Funktion & Wachstumsmodelle** ↗

