minærva

ML 2

SKRIPT

Analytische Geometrie

Erklärskript

Die Aufgaben 4–5 zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Verweise auf Aufgaben sind Links.

Mathematik-LK – Abitur 2027 · Skript 2 von 3

Pirmin Gohn

Nutzungshinweis: Dieses Skript darf nur im Rahmen des Unterrichts und der Abiturvorbereitung verwendet werden; insbesondere ist die eigenständige Weitergabe untersagt.

Skriptreihe ML · Mathematik-Leistungsfach zum Abitur 2027 · Baden-Württemberg · Bildungsplan 2016

ML1 Analysis · Teil B I | ML2 Analytische Geometrie · Teil B II | ML3 Stochastik · Teil B III | ML-K Kompakt

Lernen mit minærva

Dieses Skript ist ein Teil von minærva. Alles gehört zusammen: Jedes Thema führt von der Erklärung zum Üben, zum Ausprobieren und ins große Bild.

minaerva.de

Skripte Verstehen
Der Stoff zum Nachlesen: Erklärungen, Herleitungen, Beispiele und typische Fehler.
minaerva.de

noctua Üben
Fragen und Aufgaben zu jedem Abschnitt, Formeltraining und Aufgaben im Stil des Abiturs, mit sofortiger Rückmeldung.
noctua.minaerva.de

fabrica Ausprobieren
Versuche und Anschauungen zum Selbermessen und Anfassen, ohne Konto, auch auf dem iPad.
fabrica.minaerva.de

tela Vernetzen
Das Wissensnetz: worauf ein Thema aufbaut und wohin es führt.
tela.minaerva.de

So greifen die Skripte ineinander

Erklärskripte	Physik PL1–PL5, das Lernskript PL-Σ und Mathe ML1–ML3 enthalten den Stoff, aber keine Aufgaben.
Aufgabenskripte	Je Fach eines mit den Übungsaufgaben. Die Erklärskripte verweisen darauf; jede Aufgaben-, Abbildungs- und Tabellennummer gibt es je Fach nur einmal.
Abi-ähnlich	Je Fach eine Sammlung mit Aufgaben, wie sie im Abitur vorkommen könnten.
Lösungsskripte	Zu den Aufgabenskripten und zu den Abi-ähnlichen Aufgaben, jeweils je Fach.
Kompakt	Formeln und Abbildungen zum schnellen Wiederholen: PL-K für Physik, ML-K für Mathe, dazu die Formelsammlung.

Am Ende vieler Abschnitte stehen Links zur passenden Übung, zum Versuch und ins Wissensnetz. In der PDF-Datei lassen sie sich direkt antippen.

Inhaltsverzeichnis

Das Abitur 2027 ..... **4**
Ablauf 4
Was geprüft wird 4
Die Marken im Skript 5
Operatoren 5
1 Vektoren **6**
1.1 Punkte im Raum 6
1.2 Vektoren und ihre Rechenregeln 6
1.3 Kollinear und komplanar 8
1.4 Betrag und Abstand 9
1.5 Skalarprodukt 9
1.6 Vektorprodukt 11
2 Geraden und Ebenen **14**
2.1 Geraden 14
2.2 Ebenen in Parameterform 15
2.3 Normalenform und Koordinatenform 15
3 Lagebeziehungen und Schnittwinkel **18**
3.1 Zwei Geraden 18
3.2 Gerade und Ebene 18
3.3 Zwei Ebenen 19
3.4 Schnittwinkel 19
4 Abstände und Spiegelungen **21**
4.1 Abstand Punkt – Ebene 21
4.2 Abstand Punkt – Gerade 22
4.3 Abstand windschiefer Geraden 22
4.4 Spiegelungen 23
5 Körper, Kugeln und Bewegungen **24**
5.1 Flächen und Volumen 24
5.2 Kugeln 25
5.3 Geradlinige Bewegungen 26
5.4 Beweise mit Vektoren nicht im Abi 2027 26
6 Lineare Gleichungssysteme **28**
6.1 Das Gaußverfahren 28
6.2 Geometrische Deutung 29

Das Abitur 2027

Die Skriptreihe zum Abitur 2027

Drei Skripte decken zusammen den Stoff des Leistungsfachs ab, jedes passend zu einem Sachgebiet von Teil B; die Aufgaben von Teil A stammen aus allen drei. Jedes Skript erklärt ausführlich, beweist die wichtigen Sätze, wo das mit Schulmitteln geht. Die Aufgaben stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Für die letzten Wochen fasst das Kompaktskript ML-K alle Formeln und Abbildungen auf wenigen Seiten zusammen.

	Skript	Bildungsplan 2016, Leistungsfach
ML1	**Analysis**	3.4.4 Funktionaler Zusammenhang, 3.4.2 Messen (Integral); Rechenwerkzeuge aus 3.4.1
ML2	**Analytische Geometrie**	3.4.3 Raum und Form; lineare Gleichungssysteme aus 3.4.1
ML3	**Stochastik**	3.4.5 Daten und Zufall
ML-K	**Kompakt**	alle Formeln, Verfahren und Abbildungen, ohne Erklärungen und Aufgaben

Ablauf

Definition

300 Minuten, Hauptprüfung am 5. Mai 2027.

Teil A – ohne Hilfsmittel: alle vier Pflichtaufgaben P1 bis P4 und zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6, je 5 BE. Abgabe spätestens **110 Minuten** nach Beginn.

Teil B – mit Hilfsmitteln: je eine Aufgabe zu Analysis (I), Analytischer Geometrie (II) und Stochastik (III); die Lehrkraft wählt aus je zwei Vorschlägen aus.

Merksatz

Hilfsmittel in Teil B:

- die mathematisch-naturwissenschaftliche **Formelsammlung des IQB**,
- ein **wissenschaftlicher Taschenrechner** (WTR).

Geodreieck und Zirkel sind in der ganzen Prüfung erlaubt.

Wichtig

Der WTR kann **keine** Gleichungen lösen, **nicht** ableiten oder integrieren und keine Graphen zeichnen. Er kann: Wertetabellen, $n!$, $\binom{n}{k}$, Mittelwert und Standardabweichung, einzelne und **kumulierte** Wahrscheinlichkeiten der Binomial- und der Normalverteilung.

Auch in Teil B wird also von Hand gerechnet.

Was geprüft wird

Merksatz

Bildungsplan 2016, Leistungsfach. Zusätzlich vorausgesetzt: **Umkehrfunktionen** sowie **Varianz** und **Standardabweichung** diskreter Zufallsgrößen.

Wichtig

Nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027:

- Mittelwert einer Funktion mit der Integralrechnung,
- uneigentliche Integrale,
- Näherungsverfahren (z. B. Newton),
- Beweise mit Vektoren.

Im Skript stehen sie mit der Marke nicht im Abi 2027.

Die Marken im Skript

FS	steht in der IQB-Formelsammlung – aber nur in **Teil B** verfügbar
nicht im Abi 2027	nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027
Zusatz	hilfreich, geht aber über den Bildungsplan hinaus

Beweise und Begründungen sind mit einem farbigen Strich am Rand abgesetzt. Sie werden im Abitur selten wörtlich verlangt – aber wer weiß, **warum** eine Regel gilt, wendet sie sicherer an und kann sie notfalls selbst wieder herleiten.

Operatoren

angeben, nennen	ohne Begründung, ohne Rechenweg
berechnen	Rechenweg darstellen
bestimmen, ermitteln	Weg frei wählbar, Lösungsweg zeigen
zeigen, nachweisen	Aussage mit gültigen Schlüssen bestätigen
begründen	Sachverhalt auf Regeln zurückführen
beurteilen	zu einem Urteil kommen und es begründen
untersuchen	Eigenschaften herausfinden, Weg frei
skizzieren	wesentliche Eigenschaften grafisch, ohne Genauigkeit
interpretieren	Ergebnis im Sachzusammenhang deuten

1 Vektoren

Die analytische Geometrie übersetzt räumliche Fragen in Rechnungen: Punkte werden zu Koordinaten, Strecken und Richtungen zu Vektoren, Geraden und Ebenen zu Gleichungen. Typische Abiturfragen betreffen einen konkreten Körper (Pyramide, Würfel, Dach, Zelt) oder eine Bewegung (Flugzeug, Drohne). Eine Skizze im Schrägbild hilft fast immer – sie zeigt, welche Punkte, Kanten und Flächen gemeint sind, und lässt Ergebnisse auf Plausibilität prüfen.
Dieses erste Kapitel stellt das Werkzeug bereit: Vektoren, mit denen man rechnen kann wie mit Zahlen, und zwei Produkte, die Winkel und Flächen messen. Fast alle Sätze lassen sich mit wenigen Zeilen beweisen – meist mit dem Satz des Pythagoras und Rechnen in Koordinaten.

1.1 Punkte im Raum

Im Raum braucht man drei Koordinatenachsen, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Im Schulbuch und im Abitur zeigt die x_1-Achse schräg nach vorn (verkürzt gezeichnet), die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben. Ein Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ wird erreicht, indem man vom Ursprung aus nacheinander p_1 Einheiten in x_1-Richtung, p_2 in x_2-Richtung und p_3 in x_3-Richtung geht.

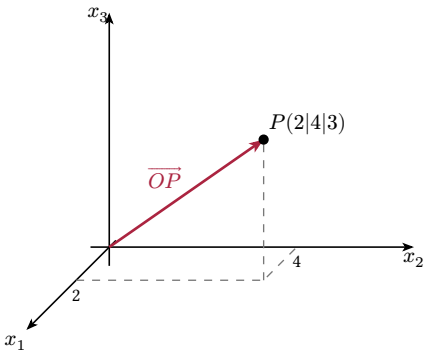


Abbildung 52: Den Punkt $P(2|4|3)$ findet man, indem man 2 in x_1-, 4 in x_2- und 3 in x_3-Richtung geht.

Merksatz

Die **Koordinatenebenen** sind die x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$, „Boden“), die x_1x_3-Ebene ($x_2 = 0$) und die x_2x_3-Ebene ($x_1 = 0$). Ein Punkt liegt auf der x_3-Achse, wenn $x_1 = x_2 = 0$ ist.

Wichtig

Im Schrägbild sieht man Längen und Winkel nicht unverzerrt: Strecken in x_1-Richtung sind verkürzt, rechte Winkel erscheinen schief. Deshalb rechnet man – das Bild dient nur der Orientierung.

Ausprobieren: **Punkte und Vektoren im Raum** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Vektoren, Betrag & Komponenten** ↗

1.2 Vektoren und ihre Rechenregeln

Ein Vektor ist eine **Verschiebung**: Er sagt, wie weit man in jede der drei Achsenrichtungen gehen muss. Man zeichnet ihn als Pfeil; alle gleich langen, gleich gerichteten Pfeile stellen denselben Vektor dar – er kann an jedem Punkt angesetzt werden.

Definition

Ein **Vektor** beschreibt eine Verschiebung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Der **Ortsvektor** $\overrightarrow{OA}$ zeigt vom Ursprung zum Punkt A; seine Koordinaten sind die von A. Der **Verbindungsvektor** von A nach B ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad (\text{„Spitze minus Fuß“}).$$

Begründung Wer von O nach B will, kann den Umweg über A nehmen: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Löst man nach $\overrightarrow{AB}$ auf, steht die Regel da.

Vektoren addiert man, indem man die Pfeile aneinanderhängt (koordinatenweise addieren); man vervielfacht sie, indem man jede Koordinate mit derselben Zahl multipliziert. Der Pfeil wird dabei gestreckt, bei negativem Faktor auch umgedreht.

Merksatz

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \qquad r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

$-\vec{a}$ ist der **Gegenvektor** (gleich lang, entgegengesetzt), $\vec{0}$ der **Nullvektor**. Es gelten dieselben Rechengesetze wie für Zahlen, zum Beispiel

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \qquad r\big(\vec{a} + \vec{b}\big) = r\vec{a} + r\vec{b}.$$

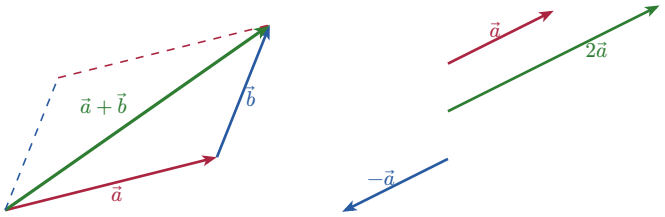


Abbildung 53: Links: Addition durch Aneinanderhängen; die Reihenfolge ist egal (gestrichelt), die Summe ist die Diagonale des Parallelogramms. Rechts: Vielfache strecken den Pfeil, ein negativer Faktor dreht ihn um.

Satz 1.1 (Mittelpunkt und Schwerpunkt)
Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC haben die Ortsvektoren

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\big), \qquad \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\big).$$

Beweis Der Mittelpunkt liegt auf halbem Weg von A nach B:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\big) = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\big).$$

Der Schwerpunkt liegt auf der Seitenhalbierenden von C zum Mittelpunkt M_c von $\overline{AB}$, und zwar bei zwei Dritteln des Wegs (das zeigt man wie den Satz über die Parallelogrammdiagonalen im Abschnitt 5.4):

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\big(\overrightarrow{OM_c} - \overrightarrow{OC}\big) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\big) = \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\big).$$

Beispiel 1
$A(1|2|3)$ und $B(3|-2|7)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3 \\ 2-2 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M(2|0|5).$$

Beispiel 2

Viereck ergänzen. $A(1|0|0)$, $B(4|1|0)$ und $C(5|4|1)$ sollen Ecken eines Parallelogramms $ABCD$ sein. Die Seite $\overline{AD}$ ist parallel und gleich lang zu $\overline{BC}$:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad D(2|3|1).$$

Kontrolle: Die Diagonalen halbieren sich, beide Mittelpunkte sind gleich:

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}.$$

Ausprobieren: **Punkte und Vektoren im Raum** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Vektoren, Betrag & Komponenten** ↗

1.3 Kollinear und komplanar

Zwei Vektoren, die in dieselbe oder in entgegengesetzte Richtung zeigen, heißen **kollinear**: Der eine ist ein Vielfaches des anderen. Drei Vektoren, die sich in **einer** Ebene darstellen lassen, heißen **komplanar**. Diese beiden Begriffe stecken hinter vielen Abiturfragen: Liegen drei Punkte auf einer Geraden? Liegen vier Punkte in einer Ebene? Sind zwei Geraden parallel?

Definition

Ein Ausdruck $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ (beide $\neq \vec{0}$) sind **kollinear**, wenn $\vec{b} = r\vec{a}$ für eine Zahl r gilt.
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind **komplanar**, wenn sich einer als Linearkombination der anderen schreiben lässt, z. B. $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$.

Satz 1.2 (Kollinear und komplanar per Gleichungssystem)

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn die Gleichung

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$$

eine Lösung hat, bei der nicht alle drei Zahlen null sind. Hat sie nur die Lösung $r = s = t = 0$, heißen die Vektoren **linear unabhängig** – sie spannen den ganzen Raum auf.

Beweis Ist etwa $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$, so ist $r\vec{a} + s\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$ – eine Lösung mit $t = -1 \neq 0$. Umgekehrt: Hat die Gleichung eine Lösung mit, sagen wir, $t \neq 0$, so darf man durch t teilen und erhält $\vec{c} = -\frac{r}{t}\vec{a} - \frac{s}{t}\vec{b}$. Für $r \neq 0$ oder $s \neq 0$ geht es genauso.

Beispiel 3

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

Ansatz $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$: Die erste Zeile liefert $r = 2$, die zweite $s = 3$. Probe in der dritten Zeile: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ ✓ – die Vektoren sind komplanar. Ändert man die letzte Koordinate von $\vec{c}$ auf 6, ergäbe die dritte Zeile $7 \neq 6$: Dann sind die drei Vektoren nicht komplanar, sondern linear unabhängig.

Merksatz

- Drei Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind kollinear.
- Vier Punkte A, B, C, D liegen in einer Ebene $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sind komplanar.

Beispiel 4
Liegen $A(1|2|3)$, $B(3|-2|7)$ und $C(4|-4|9)$ auf einer Geraden?

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ja – $\overrightarrow{AC}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$.

Ausprobieren: **Punkte und Vektoren im Raum** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Vektoren, Betrag & Komponenten** ↗

1.4 Betrag und Abstand

Satz 1.3 (Betrag eines Vektors)
Die Länge eines Vektors und der Abstand zweier Punkte sind FS

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad d(A,\, B) = |\overrightarrow{AB}| \ .$$

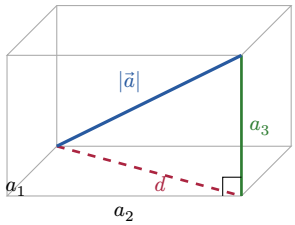


Abbildung 54: Die Länge eines Vektors ist die Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten a_1, a_2, a_3: zweimal Pythagoras.

Beweis Die Bodendiagonale d des Quaders ist nach Pythagoras $d^2 = a_1^2 + a_2^2$. Sie steht senkrecht auf der Kante a_3, also ist nach Pythagoras im senkrechten Dreieck

$$|\vec{a}|^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Beispiel 5
$A(1|2|3)$, $B(3|-2|7)$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6.$$

Einheitsvektor in Richtung $\overrightarrow{AB}$ (Länge 1): durch die Länge teilen,

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ist das Dreieck mit $C(5|0|3)$ gleichschenklig? $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 4 + 0} = \sqrt{20}$ und $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}$ – alle drei Seiten sind verschieden lang, also nein.

Ausprobieren: **Punkte und Vektoren im Raum** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Vektoren, Betrag & Komponenten** ↗

1.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt verbindet Rechnen und Geometrie: Aus den Koordinaten berechnet man eine Zahl, die etwas über den Winkel zwischen zwei Vektoren verrät. Ist sie null, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander – der mit Abstand häufigste Einsatz im Abitur. Positiv bedeutet einen spitzen, negativ einen stumpfen Winkel. Der Weg zur Winkelformel führt über den Kosinussatz, den man zuerst mit Pythagoras beweist.

Satz 1.4 (Kosinussatz)
In jedem Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Winkel γ gegenüber c gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Für $\gamma = 90°$ ist das der Satz des Pythagoras.

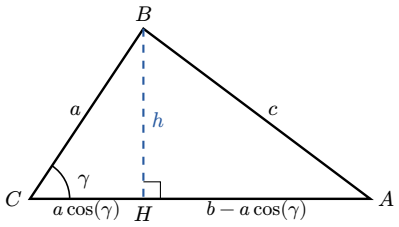


Abbildung 55: Beweis des Kosinussatzes: Die Höhe h teilt die Seite $b = \overline{CA}$ in die Abschnitte $a\cos(\gamma)$ und $b - a\cos(\gamma)$.

Beweis Die Höhe von B auf die Seite $\overline{CA}$ hat den Fußpunkt H. Im rechtwinkligen Dreieck CHB ist $h = a\sin(\gamma)$ und $\overline{CH} = a\cos(\gamma)$, also $\overline{HA} = b - a\cos(\gamma)$. Pythagoras im Dreieck HAB:

$$c^2 = h^2 + (b - a\cos(\gamma))^2 = a^2\sin^2(\gamma) + b^2 - 2ab\cos(\gamma) + a^2\cos^2(\gamma) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\ ,$$

denn $\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$. (Bei stumpfem γ liegt H außerhalb, die Rechnung ist dieselbe.)

Definition
Skalarprodukt FS

$$\vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Satz 1.5 (Skalarprodukt und Winkel)
Für den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($0° \le \varphi \le 180°$) gilt

$$\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \qquad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Insbesondere stehen zwei Vektoren ($\neq \vec{0}$) genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt null ist:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\circ\vec{b} = 0.$$

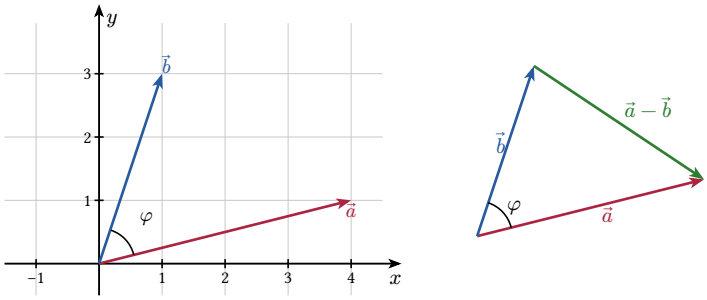


Abbildung 56: Links: Je größer der Winkel, desto kleiner das Skalarprodukt; bei 90° ist es null. Rechts: Das Dreieck aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ liefert mit dem Kosinussatz die Winkelformel.

Beweis Im Dreieck mit den Seiten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ (Abbildung rechts) gilt der Kosinussatz:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(\varphi).$$

Die linke Seite rechnet man in Koordinaten aus:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{3}a_i^2 + \sum_{i=1}^{3}b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3}a_ib_i = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\circ\vec{b}.$$

Vergleicht man beide Zeilen, bleibt $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(\varphi)$. Ist $\varphi = 90°$, ist $\cos(\varphi) = 0$ und damit das Skalarprodukt null – und umgekehrt, denn $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind nicht null.

Satz 1.6 (Rechenregeln für das Skalarprodukt)

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\circ\vec{a}, \qquad \vec{a}\circ\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c}$$

$$(r\vec{a})\circ\vec{b} = r\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right), \qquad \vec{a}\circ\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Beweis Alle vier Regeln folgen direkt aus der Koordinatendarstellung, z. B.

$$\vec{a}\circ\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i(b_i+c_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i + \sum_{i=1}^{3} a_i c_i = \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c}$$

und $\vec{a}\circ\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$.

Beispiel 6

Orthogonal?

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} = 4 - 10 + 6 = 0$$

Ja, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Winkel zwischen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}: \quad \cos(\varphi) = \frac{2-2+4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63{,}6°.$$

Beispiel 7

Rechter Winkel im Dreieck? $A(1|1|0)$, $B(3|2|2)$, $C(2|3|-1)$. Man prüft alle drei Ecken:

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = 2, \quad \overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} = 7, \quad \overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = 4.$$

Kein Skalarprodukt ist null – das Dreieck hat keinen rechten Winkel (alle Winkel sind spitz).

Vorgehen

Einen Vektor finden, der auf zwei gegebenen senkrecht steht (ohne Vektorprodukt): $\vec{n}\circ\vec{u} = 0$ und $\vec{n}\circ\vec{v} = 0$ ergeben zwei Gleichungen für drei Unbekannte – eine Koordinate frei wählen (z. B. $n_3 = 1$) und die anderen ausrechnen.

Beispiel 8

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}: \quad n_1 + 2n_2 = 0, \quad n_2 + 3n_3 = 0$$

Mit $n_3 = 1$ folgt $n_2 = -3$ und $n_1 = 6$, also

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

Ausprobieren: **Skalar- und Vektorprodukt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Skalar- & Kreuzprodukt** ↗

1.6 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt liefert zu zwei Vektoren einen dritten, der auf beiden senkrecht steht – genau das, was man für einen Normalenvektor einer Ebene braucht. Seine Länge ist zugleich der Flächeninhalt des Parallelogramms, das die beiden Vektoren aufspannen; halbiert ergibt sie die Dreiecksfläche.

Definition

Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vorgehen

Merkhilfe: Beide Vektoren zweimal untereinander schreiben, die erste und letzte Zeile streichen und „über Kreuz“ rechnen: für die erste Koordinate die Zeilen 2 und 3 ($a_2 b_3 - a_3 b_2$), für die zweite die Zeilen 3 und 1, für die dritte die Zeilen 1 und 2.

Beispiel 9

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probe – beide Skalarprodukte müssen null sein:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0, \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 - 3 + 3 = 0.$$

Satz 1.7 (Eigenschaften des Vektorprodukts)

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.

b) Seine Länge ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi), \qquad A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \; .$$

Beweis **1.** Man rechnet das Skalarprodukt aus:

$$\vec{a} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Multipliziert man aus, kommt jedes der sechs Produkte (wie $a_1 a_2 b_3$) genau einmal mit $+$ und einmal mit $-$ vor – die Summe ist 0. Für $\vec{b}$ genauso.

2. Quadriert man die drei Koordinaten von $\vec{a} \times \vec{b}$ und addiert, erhält man die sechs Quadrate $a_i^2 b_j^2$ mit $i \neq j$ und die gemischten Glieder:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_3 b_1 b_3 + a_2 a_3 b_2 b_3).$$

Dasselbe ergibt $|\vec{a}|^2 \; |\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \circ \vec{b} \right)^2$: Das erste Produkt liefert alle neun Quadrate $a_i^2 b_j^2$, das abgezogene Quadrat die drei mit $i = j$ und dieselben gemischten Glieder. Also

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \; |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \; |\vec{b}|^2 \cos^2(\varphi) = \left(|\vec{a}| \; |\vec{b}| \sin(\varphi) \right)^2.$$

Das Parallelogramm hat die Grundseite $|\vec{a}|$ und die Höhe $|\vec{b}| \sin(\varphi)$ – also genau diesen Flächeninhalt. ∎

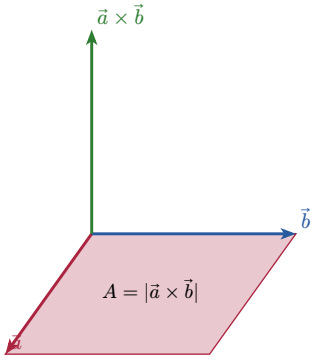


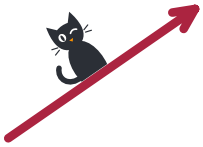
Abbildung 57: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf dem Parallelogramm aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$; seine Länge ist dessen Flächeninhalt.

Beispiel 10

Dreieck $A(1|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(0|0|3)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\sqrt{36+9+4} = \frac{7}{2}.$$

Ausprobieren: **Skalar- und Vektorprodukt** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Skalar- & Kreuzprodukt** ↗



2 Geraden und Ebenen

Geraden und Ebenen sind die einfachsten „geraden“ Objekte im Raum. Beide beschreibt man in **Parameterform**: Man startet an einem Punkt und geht beliebig weit in eine Richtung (Gerade) oder in zwei Richtungen (Ebene). Für Ebenen gibt es zusätzlich die **Koordinatenform** – eine einzige Gleichung, die für die meisten Rechnungen bequemer ist. Wie man von der einen zur anderen kommt, leitet dieses Kapitel her.

2.1 Geraden

Eine Gerade im Raum beschreibt man durch einen Punkt, an dem man startet (Stützvektor), und eine Richtung, in die man beliebig weit geht (Richtungsvektor). Jeder Wert des Parameters t liefert einen Punkt der Geraden. Im Raum gibt es keine Geradengleichung der Form $y = mx + b$ – deshalb braucht man die Parameterform.

Definition

Parameterform:

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{p}$ Stützvektor, $\vec{u} \neq \vec{0}$ Richtungsvektor. Gerade durch A und B: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$; für $0 \leq t \leq 1$ erhält man die **Strecke** $\overline{AB}$.

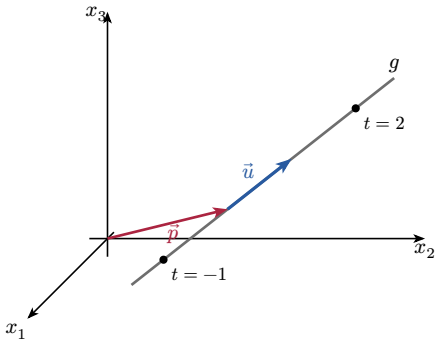


Abbildung 58: $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$: vom Stützpunkt aus beliebig weit in Richtung $\vec{u}$ ($t > 0$) oder entgegen ($t < 0$).

Merksatz

Punktprobe: Liegt Q auf g? Die Gleichung $\overrightarrow{OQ} = \vec{p} + t\vec{u}$ zeilenweise nach t auflösen – ergibt sich in allen drei Zeilen dasselbe t, liegt Q auf g.

Beispiel 11

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Liegt $Q(5|0|6)$ auf g? Zeilenweise: $1 + 2t = 5$, $2 - t = 0$, $3t = 6$ – jedes Mal $t = 2$, also ja. Für $R(3|1|4)$ ergibt sich $t = 1$, $t = 1$, $t = \frac{4}{3}$ – widersprüchlich, R liegt nicht auf g.

Spurpunkt mit der x_1x_2-Ebene: Dort ist $x_3 = 0$, also $3t = 0$, $t = 0$ und der Punkt $(1|2|0)$. Mit der x_1x_3-Ebene ($x_2 = 0$): $t = 2$, Punkt $(5|0|6)$.

Wichtig

Dieselbe Gerade hat viele Parameterformen: Jeder Punkt der Geraden taugt als Stützpunkt, jedes Vielfache $r\vec{u}$ ($r \neq 0$) als Richtungsvektor. Zwei Gleichungen beschreiben also nicht schon deshalb verschiedene Geraden, weil sie verschieden aussehen.

Ausprobieren: **Gerade und Ebene** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

2.2 Ebenen in Parameterform

Eine Ebene braucht einen Stützpunkt und **zwei** Richtungen, die nicht kollinear sind (**Spannvektoren**). Jeder Punkt der Ebene ist erreichbar, indem man vom Stützpunkt aus ein Stück in die eine und ein Stück in die andere Richtung geht.

Definition

Parameterform:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

mit nicht kollinearen Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Ebene durch drei Punkte A, B, C (nicht auf einer Geraden): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$.

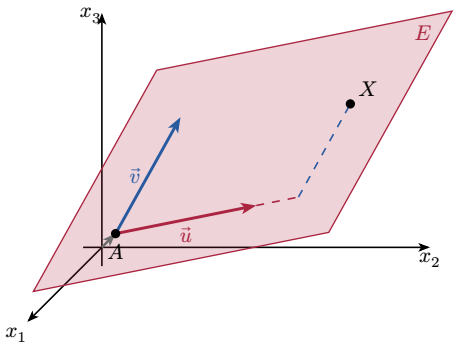


Abbildung 59: Ebene in Parameterform: Der Punkt X wird vom Stützpunkt A aus mit $r = 1{,}3$ Schritten $\vec{u}$ und $s = 0{,}8$ Schritten $\vec{v}$ erreicht.

Beispiel 12

Ebene durch $A(1|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(1|1|3)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Ausprobieren: **Ebene durch drei Punkte** ↗ · **Parameter-, Normalen- und Koordinatenform** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

2.3 Normalenform und Koordinatenform

Statt mit zwei Richtungen in der Ebene kann man eine Ebene auch mit einer einzigen Richtung beschreiben, die **senkrecht** auf ihr steht: dem **Normalenvektor** $\vec{n}$. Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene, wenn der Vektor von A nach X in der Ebene liegt – also senkrecht auf $\vec{n}$ steht.

Definition

FS

- **Normalenform:** $E: (\vec{x} - \vec{a}) \circ \vec{n} = 0$
- **Koordinatenform:** $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

$\vec{n}$ ist ein **Normalenvektor**: Er steht senkrecht auf jeder Richtung in der Ebene.

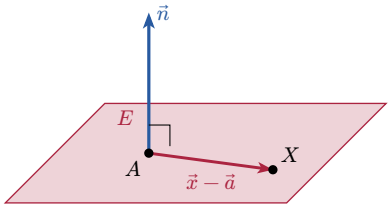


Abbildung 60: X liegt genau dann in E, wenn $\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a}$ senkrecht auf dem Normalenvektor $\vec{n}$ steht.

Satz 2.1 (Koordinatenform)
Jede Ebene mit Stützvektor $\vec{a}$ und Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich schreiben als

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \quad \text{mit} \quad d = \vec{n} \circ \vec{a}.$$

Umgekehrt beschreibt jede solche Gleichung (mit $\vec{n} \neq \vec{0}$) eine Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$. Ist die Ebene in Parameterform gegeben, ist $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ein Normalenvektor.

Beweis Multipliziert man die Normalenform mit den Rechenregeln des Skalarprodukts aus, erhält man $\vec{x} \circ \vec{n} - \vec{a} \circ \vec{n} = 0$, also

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = \vec{n} \circ \vec{a} = d.$$

Der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ steht auf beiden Spannvektoren senkrecht (Satz 1.7) und damit auf jeder Linearkombination $r\vec{u} + s\vec{v}$, also auf jeder Richtung in der Ebene. ∎

Vorgehen
Parameterform → Koordinatenform: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ berechnen, $d = \vec{n} \circ \vec{a}$ (Stützpunkt einsetzen).
Koordinatenform → Parameterform: drei Punkte der Ebene suchen (z. B. die Spurpunkte) und daraus die Parameterform bilden.

Beispiel 13

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 6, \qquad E : 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 6.$$

Probe mit $C(1|1|3)$: $6 - 3 + 3 = 6$ ✓

Beispiel 14
Umgekehrt: $E : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$. Spurpunkte $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$, also

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Merksatz
Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Achsen): zwei Koordinaten null setzen. Die Verbindungslinien sind die **Spurgeraden**; mit ihnen zeichnet man die Ebene im Schrägbild.

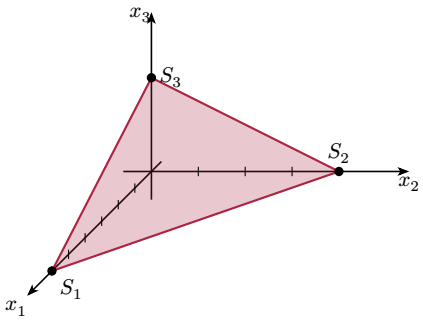


Abbildung 61: $E : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$ mit den Spurpunkten $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$ und den Spurgeraden.

Merksatz

Besondere Lagen, an der Koordinatenform ablesbar:

- Fehlt eine Variable, ist die Ebene parallel zu dieser Achse: $2x_1 + 3x_2 = 6$ ist parallel zur x_3-Achse.
- Fehlen zwei Variablen, ist die Ebene parallel zu einer Koordinatenebene: $x_3 = 4$ ist parallel zum „Boden“.
- Ist $d = 0$, geht die Ebene durch den Ursprung.

Begründung Fehlt x_3, so ist $n_3 = 0$, also $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$: Der Richtungsvektor der x_3-Achse steht senkrecht auf $\vec{n}$ und ist damit eine Richtung in der Ebene. Bei $d = 0$ erfüllt $O(0|0|0)$ die Gleichung.

Typischer Fehler

Falsch: Aus $E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ den Punkt $(2|-1|3)$ als Punkt der Ebene ablesen.

Richtig: Die Koeffizienten bilden den **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Einen Punkt der Ebene findet man, indem man zwei Koordinaten wählt und die dritte ausrechnet, etwa $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 0$.

Ausprobieren: **Ebene durch drei Punkte ↗** · **Koordinatenform verstehen ↗** · **Parameter-, Normalen- und Koordinatenform ↗**
Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände ↗**



3 Lagebeziehungen und Schnittwinkel

Zwei Geraden in der Ebene schneiden sich oder sind parallel. Im Raum gibt es eine dritte Möglichkeit: Sie können aneinander vorbeilaufen, ohne parallel zu sein (**windschief**), wie zwei Kanten eines Würfels, die nicht in einer gemeinsamen Fläche liegen. Die Untersuchung folgt immer demselben Schema: zuerst die Richtungen vergleichen, dann gleichsetzen bzw. einsetzen. Schneiden sich zwei Objekte, interessiert oft der Winkel, unter dem sie es tun.

3.1 Zwei Geraden

Satz 3.1 (Lage zweier Geraden)
Für $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$ gilt genau einer der Fälle:

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ kollinear und h enthält den Stützpunkt von g: **identisch**,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ kollinear, sonst: **parallel**,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ nicht kollinear und $\vec{p} + t\vec{u} = \vec{q} + s\vec{v}$ lösbar: **Schnittpunkt**,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ nicht kollinear und nicht lösbar: **windschief**.

Begründung Gleichsetzen ergibt drei Gleichungen für zwei Unbekannte t und s. Bei nicht kollinearen Richtungen legen schon zwei Zeilen t und s eindeutig fest; die dritte Zeile entscheidet, ob sie passen (Schnittpunkt) oder nicht (windschief). Liegen die Geraden in einer gemeinsamen Ebene, kann der windschiefe Fall nicht eintreten – deshalb gibt es ihn in der Ebene nicht.

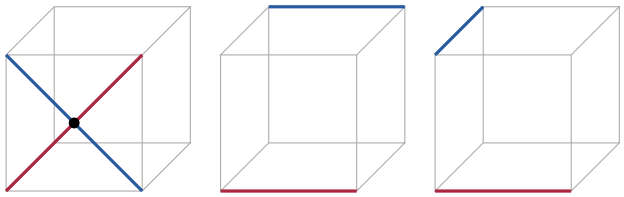


Abbildung 62: Lage zweier Geraden am Würfel: Die beiden Diagonalen der vorderen Seitenfläche schneiden sich in deren Mittelpunkt; gegenüberliegende Kanten sind parallel; eine Boden- und eine Deckkante in verschiedenen Richtungen sind windschief.

Beispiel 15

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear. Gleichsetzen ergibt

$$1 + t = 0, \quad t = 3 + s, \quad 2 = s.$$

Aus der ersten Zeile $t = -1$, aus der dritten $s = 2$; in der zweiten: $-1 = 5$ – falsch. Kein Schnittpunkt, die Geraden sind **windschief**.

Typischer Fehler
Falsch: Beim Schnitt zweier Geraden für beide denselben Parameter t verwenden.
Richtig: Verschiedene Parameter nehmen, etwa r und s: Den Schnittpunkt erreichen beide Geraden im Allgemeinen bei verschiedenen Parameterwerten.

Ausprobieren: **Lagebeziehungen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

3.2 Gerade und Ebene

Satz 3.2 (Gerade parallel zur Ebene)
Eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{u}$ ist genau dann parallel zur Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ oder liegt in ihr, wenn

$$\vec{u} \circ \vec{n} = 0.$$

Beweis Die Gerade ist parallel zu E (oder liegt in E) genau dann, wenn ihre Richtung eine Richtung in der Ebene ist. Die Richtungen in der Ebene sind genau die Vektoren, die senkrecht auf $\vec{n}$ stehen, und das bedeutet $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$.

Vorgehen

Gerade und Ebene (Koordinatenform): Die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunkts in die Ebenengleichung einsetzen.

- eine Lösung für t: Schnittpunkt (Durchstoßpunkt),
- falsche Aussage (wie $0 = 5$): parallel,
- wahre Aussage ($0 = 0$): Gerade liegt in der Ebene.

Beispiel 16

$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$ und

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \quad 2(2+t) + 1 + 2(4-t) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 13 = 5.$$

Falsch für jedes t: g ist parallel zu E. Tatsächlich ist $\vec{u} \circ \vec{n} = 2 + 0 - 2 = 0$. Mit

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \quad 2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) = 13 + 9t = 5$$

folgt $t = -\frac{8}{9}$ und der Schnittpunkt $\left(\frac{2}{9} \mid \frac{1}{9} \mid \frac{20}{9}\right)$.

Typischer Fehler

Falsch: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, also ist die Gerade parallel zur Ebene.
Richtig: Sie ist parallel **oder liegt in der Ebene**. Die Punktprobe mit dem Stützpunkt entscheidet.

Ausprobieren: **Gerade und Ebene** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

3.3 Zwei Ebenen

Vorgehen

Zwei Ebenen: Normalenvektoren kollinear? Dann parallel oder identisch (Punktprobe). Sonst gibt es eine **Schnittgerade**: beide Koordinatengleichungen als LGS lösen, eine Variable wird zum Parameter.

Beispiel 17

$E_1 : x_1 + x_2 = 2$, $E_2 : x_2 - x_3 = 1$. Mit $x_2 = t$ folgen $x_1 = 2 - t$ und $x_3 = t - 1$:

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Probe: Der Richtungsvektor muss auf beiden Normalenvektoren senkrecht stehen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Ausprobieren: **Lagebeziehungen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

3.4 Schnittwinkel

Winkel zwischen Geraden und Ebenen berechnet man mit dem Skalarprodukt der passenden Vektoren: Richtungsvektoren bei Geraden, Normalenvektoren bei Ebenen. Gemeint ist immer der **kleinere** der beiden Winkel, die sich beim Schneiden bilden – deshalb der Betrag im Zähler.

Satz 3.3 (Schnittwinkel)

Gerade und Gerade (Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$):

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Gerade und Ebene (Richtungsvektor $\vec{u}$, Normalenvektor $\vec{n}$):

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ebene und Ebene (Normalenvektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$):

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Der Betrag sorgt für $0° \leq \alpha \leq 90°$.

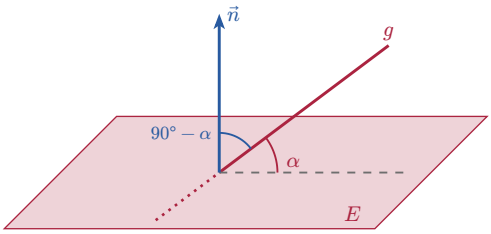


Abbildung 63: Winkel zwischen Gerade und Ebene: α liegt zwischen der Geraden und ihrem „Schatten“ in der Ebene (gestrichelt). Der Normalenvektor schließt mit der Geraden den Ergänzungswinkel $90° - \alpha$ ein.

Beweis **Gerade und Gerade:** Das ist die Winkelformel des Skalarprodukts (Satz 1.5); der Betrag wählt von den Winkeln φ und $180° - \varphi$ den kleineren, denn $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$.
Gerade und Ebene: Das Skalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{n}$ liefert den Winkel β zwischen der Geraden und dem Normalenvektor. Weil $\vec{n}$ senkrecht auf der Ebene steht, ist $\beta = 90° - \alpha$ (Abbildung), und $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$.
Ebene und Ebene: Dreht man eine Ebene um ihre Schnittgerade mit der anderen, dreht sich ihr Normalenvektor um denselben Winkel mit. Der Winkel zwischen den Ebenen ist deshalb der (kleinere) Winkel zwischen den Normalenvektoren. ∎

Beispiel 18

g mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die x_1x_2-Ebene mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°.$$

Plausibel: g steigt pro Schritt in x_1-Richtung um gleich viel in x_3-Richtung.

Beispiel 19

Dachneigung: $E_1 : x_3 = 0$ (Boden) und die Dachfläche $E_2 : x_1 + x_3 = 3$:

$$\cos(\alpha) = \frac{|0 + 0 + 1|}{1 \cdot \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°.$$

Typischer Fehler

Falsch: Den Winkel zwischen Gerade und Ebene mit dem Kosinus aus Richtungs- und Normalenvektor berechnen.
Richtig: So erhält man den Winkel zur **Normalen**. Der Schnittwinkel mit der Ebene ist 90° minus diesen Winkel; deshalb steht in der Formel der Sinus.

Ausprobieren: **Gerade und Ebene ↗** · **Lagebeziehungen ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände ↗**



4 Abstände und Spiegelungen

Abstand heißt immer **kürzeste** Entfernung – und die kürzeste Verbindung steht senkrecht. Deshalb laufen alle Abstandsrechnungen auf ein **Lot** hinaus. Am bequemsten ist der Abstand eines Punkts von einer Ebene: Mit der Hesse'schen Normalenform setzt man den Punkt einfach ein. Spiegeln ist eng verwandt: Man geht den Weg zum Lotfußpunkt und noch einmal genauso weit.

4.1 Abstand Punkt – Ebene

Satz 4.1 (Hesse'sche Normalenform)
Für $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und $P(p_1|p_2|p_3)$ gilt

$$d(P,\,E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d|}{|\vec{n}|}.$$

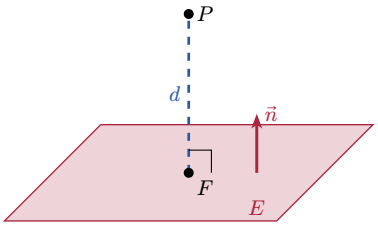


Abbildung 64: Der Abstand von P zur Ebene ist die Länge des Lots $\overline{PF}$; F heißt Lotfußpunkt. Das Lot hat die Richtung des Normalenvektors.

Beweis Das Lot von P auf E verläuft in Richtung $\vec{n}$: Der Lotfußpunkt ist $\overrightarrow{OF} = \vec{p} + t\vec{n}$ für ein passendes t. Weil F in E liegt, gilt

$$\vec{n}\circ(\vec{p} + t\vec{n}) = d \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\circ\vec{p} + t\,|\vec{n}|^2 = d \quad\Rightarrow\quad t = \frac{d - \vec{n}\circ\vec{p}}{|\vec{n}|^2}.$$

Der Abstand ist die Länge von $\overrightarrow{PF} = t\vec{n}$:

$$d(P,\,E) = |t|\cdot|\vec{n}| = \frac{|\vec{n}\circ\vec{p} - d|}{|\vec{n}|^2}\cdot|\vec{n}| = \frac{|\vec{n}\circ\vec{p} - d|}{|\vec{n}|}.$$

Beispiel 20
$E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ und $P(2|1|4)$:

$$d(P,\,E) = \frac{|2\cdot 2 + 1 + 2\cdot 4 - 5|}{3} = \frac{8}{3}.$$

Setzt man einen Punkt **der Ebene** ein, ist der Zähler null. Das Vorzeichen von $\vec{n}\circ\vec{p} - d$ (ohne Betrag) zeigt, auf welcher Seite der Ebene P liegt.

Merksatz
Parallele Ebenen oder eine zu E parallele Gerade: Abstand eines beliebigen Punktes der einen zur anderen.

Typischer Fehler
Falsch: Den Punkt in die Koordinatengleichung einsetzen und das Ergebnis als Abstand nehmen.
Richtig: Durch die Länge des Normalenvektors teilen und den Betrag nehmen: $d(P,\,E) = \frac{|n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3-d|}{|\vec{n}|}$.

Ausprobieren: **Abstand Punkt – Ebene** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

4.2 Abstand Punkt – Gerade

Vorgehen

Lotfußpunkt F auf g als allgemeinen Geradenpunkt $\overrightarrow{OF_t} = \vec{p} + t\vec{u}$ ansetzen; t aus der Bedingung $\overrightarrow{F_tP} \circ \vec{u} = 0$ bestimmen; dann $d = |\overrightarrow{FP}|$.

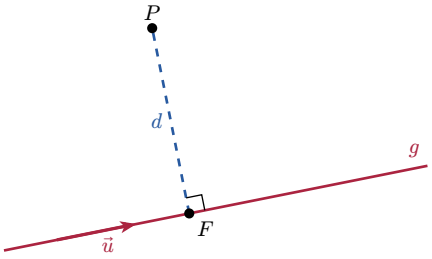


Abbildung 65: Abstand Punkt – Gerade: Die Verbindung $\overrightarrow{FP}$ zum Lotfußpunkt steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$.

Beispiel 21

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $P(2|3|4)$. Allgemeiner Geradenpunkt $F_t(1+t \mid t \mid 0)$:

$$\overrightarrow{F_tP} = \begin{pmatrix}1-t\\3-t\\4\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{F_tP} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (1-t) + (3-t) = 4 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2.$$

Also $F(3|2|0)$ und

$$\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \quad d = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Satz 4.2 (Abstandsformel Punkt – Gerade Zusatz**)**

Ist A ein Punkt der Geraden g mit Richtungsvektor $\vec{u}$, so gilt

$$d(P,\, g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Beweis $\overrightarrow{AP}$ und $\vec{u}$ spannen ein Parallelogramm auf. Sein Flächeninhalt ist einerseits $|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|$ (Satz 1.7), andererseits Grundseite mal Höhe – und die Höhe auf die Seite $\vec{u}$ ist genau der Abstand von P zur Geraden: $|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot d$. ∎

Beispiel 22

Dasselbe Beispiel mit $A(1|0|0)$:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}, \qquad d = \frac{\sqrt{16+16+4}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Ausprobieren: **Abstände und Spiegelungen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

4.3 Abstand windschiefer Geraden

Satz 4.3 (Abstand windschiefer Geraden)

Für windschiefe Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$ ist mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$d(g,\, h) = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Beweis Die kürzeste Verbindung $\overrightarrow{FG}$ (F auf g, G auf h) steht auf beiden Geraden senkrecht, hat also die Richtung von $\vec{n}$: $\overrightarrow{FG} = \pm d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Der Weg vom Stützpunkt P zum Stützpunkt Q lässt sich über F und G gehen:

$$\vec{q} - \vec{p} = t_0\vec{u} + \overrightarrow{FG} - s_0\vec{v}.$$

Bildet man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\vec{n}$, fallen die Glieder mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ weg (sie stehen senkrecht auf $\vec{n}$), und es bleibt $(\vec{q} - \vec{p}) \circ \vec{n} = \pm d \ |\vec{n}|$.

Beispiel 23

Die windschiefen Geraden aus dem Beispiel in Abschnitt 3.1:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{|-1-3-2|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

Ausprobieren: **Abstände und Spiegelungen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

4.4 Spiegelungen

Spiegeln heißt: Den Weg zum Spiegelzentrum (Punkt bzw. Lotfußpunkt) noch einmal gleich weit fortsetzen. Rechnerisch ist das immer dieselbe Idee – das Spiegelzentrum ist der Mittelpunkt zwischen Original und Bild.

Merksatz

- **Punkt an Punkt** Z: $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OP}$.
- **Punkt an Ebene:** Lotgerade $\vec{p} + t\vec{n}$ mit E schneiden (Lotfußpunkt F bei t_F), dann $\overrightarrow{OP'} = \vec{p} + 2t_F\vec{n}$.
- **Punkt an Gerade:** Lotfußpunkt F wie beim Abstand, dann $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$.
- **Gerade an Punkt:** Stützpunkt spiegeln, Richtungsvektor bleibt.

Begründung F ist der Mittelpunkt von $\overline{PP'}$, also $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right)$ (Satz 1.1). Nach $\overrightarrow{OP'}$ aufgelöst: $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$. Liegt F beim Parameter t_F der Lotgeraden, liegt P' beim doppelten Parameter.

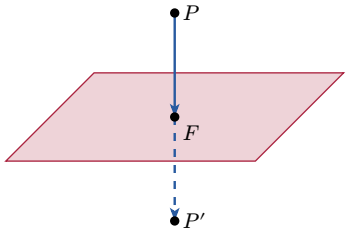


Abbildung 66: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PF}$: zweimal der Weg zum Lotfußpunkt.

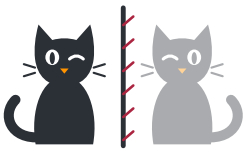
Beispiel 24

$P(2|1|4)$ an $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$ spiegeln. Die Lotgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ in E eingesetzt ergibt $13 + 9t = 5$, also $t_F = -\frac{8}{9}$. Damit

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} - \frac{16}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{14}{9}\\-\frac{7}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Kontrolle: $d(P, E) = |t_F| \cdot |\vec{n}| = \frac{8}{9} \cdot 3 = \frac{8}{3}$ – wie mit der Hesse'schen Normalenform.

Ausprobieren: **Abstand Punkt – Ebene** ↗ · **Abstände und Spiegelungen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗



5 Körper, Kugeln und Bewegungen

In den Abituraufgaben zur Geometrie geht es fast immer um einen **Körper** – eine Pyramide, ein Prisma, ein Haus mit Walmdach, ein Zelt – oder um eine **Bewegung** auf einer geraden Bahn. Die Werkzeuge der vorigen Kapitel werden dabei kombiniert: Flächen mit dem Vektorprodukt, Höhen mit dem Abstand Punkt – Ebene, Neigungen mit dem Schnittwinkel.

5.1 Flächen und Volumen

Merksatz

- Dreieck: $A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ oder $\frac{1}{2}gh$,
- Pyramide und Kegel: $V = \frac{1}{3}G \cdot h$; die Höhe h ist der Abstand der Spitze von der Grundebene,
- Prisma und Zylinder: $V = G \cdot h$.

Beispiel 25

Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 6 in der x_1x_2-Ebene und Spitze $S(3|3|5)$: $h = 5$, $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 5 = 60$.

Beispiel 26

Schiefe Grundfläche. Pyramide mit der Grundfläche $A(2|0|0)$, $B(0|4|0)$, $C(0|0|4)$ und der Spitze $S(4|4|4)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\8\\8\end{pmatrix}, \qquad G = \frac{1}{2}\sqrt{256+64+64} = \frac{1}{2}\sqrt{384} \approx 9{,}80.$$

Grundebene mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$: $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Höhe

$$h = d(S,\,E) = \frac{|8+4+4-4|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \approx 4{,}90, \qquad V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{384} \cdot \frac{12}{\sqrt{6}} = 16.$$

Satz 5.1 (Spatprodukt Zusatz**)**

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ spannen einen Spat (schiefen Quader) auf. Sein Volumen ist

$$V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|, \qquad V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} \quad \text{(dreiseitig)}.$$

Ist das Spatprodukt null, sind die drei Vektoren komplanar – ein schneller Test, ob vier Punkte in einer Ebene liegen.

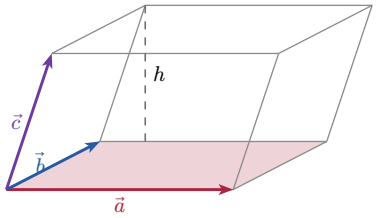


Abbildung 67: Spat aus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: Grundfläche $|\vec{a} \times \vec{b}|$, Höhe h ist der Anteil von $\vec{c}$ in Richtung des Normalenvektors.

Beweis Volumen gleich Grundfläche mal Höhe. Die Grundfläche ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ (Satz 1.7); die Höhe ist der Teil von $\vec{c}$, der in Richtung des Normalenvektors $\vec{a} \times \vec{b}$ zeigt, also $h = |\vec{c}| \cdot |\cos(\theta)|$, wobei θ der Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist. Mit der Winkelformel des Skalarprodukts:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos(\theta)| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|\ .$$

Eine dreiseitige Pyramide hat die halbe Grundfläche (Dreieck statt Parallelogramm) und den Faktor $\frac{1}{3}$: zusammen $\frac{1}{6}$. ∎

Ausprobieren: **Kugeln und Körper ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Dreiecksgeometrie: Pythagoras & Strahlensatz ↗** · **Geraden, Ebenen & Abstände ↗**

5.2 Kugeln

Kugeln kommen im Abitur vor allem in Teil A vor: Radius aus Mittelpunkt und Kugelpunkt, Tangente oder Tangentialebene in einem Kugelpunkt, Lage einer Ebene zur Kugel. Alles läuft auf Abstände und Skalarprodukte zurück – neue Verfahren braucht man nicht.

Definition

Kugel mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ und Radius r: alle Punkte X mit $|\overrightarrow{MX}| = r$, also

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$

Satz 5.2 (Tangentialebene)

Die Tangentialebene an die Kugel im Kugelpunkt P hat den Normalenvektor $\overrightarrow{MP}$:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \circ (\vec{p} - \vec{m}) = 0.$$

Begründung Die Tangentialebene berührt die Kugel nur in P. Jeder andere Punkt X der Ebene muss weiter von M entfernt sein als r. Das ist genau dann der Fall, wenn $\overline{MP}$ das Lot von M auf die Ebene ist (das Lot ist die kürzeste Verbindung), wenn also $\overrightarrow{MP}$ senkrecht auf der Ebene steht.

Merksatz

Kugel und Ebene: Abstand d von M zur Ebene berechnen (Hesse'sche Normalenform).

- $d > r$: kein gemeinsamer Punkt,
- $d = r$: Ebene berührt die Kugel (Tangentialebene),
- $d < r$: Schnittkreis mit Radius $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$; sein Mittelpunkt ist der Lotfußpunkt von M auf der Ebene.

Kugel und Gerade: Geradenpunkt in die Kugelgleichung einsetzen; die quadratische Gleichung hat 0, 1 oder 2 Lösungen (Passante, Tangente, Sekante). **Tangente in einem Kugelpunkt P:** jede Gerade durch P, deren Richtungsvektor senkrecht auf $\overrightarrow{MP}$ steht, also $\vec{u} \circ \overrightarrow{MP} = 0$. Alle diese Tangenten liegen in der Tangentialebene in P.

Begründung Der Mittelpunkt M, der Mittelpunkt des Schnittkreises und ein Punkt auf dem Schnittkreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse r und den Katheten d und ρ. Pythagoras: $\rho^2 + d^2 = r^2$.

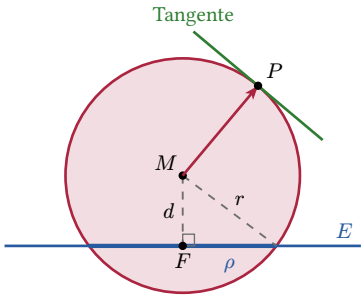


Abbildung 68: Schnitt durch den Mittelpunkt: Die Ebene E hat von M den Abstand $d < r$ und schneidet die Kugel im Kreis mit Mittelpunkt F (Lotfußpunkt) und Radius ρ. Oben die Tangente in P: Sie steht senkrecht auf $\overrightarrow{MP}$.

Beispiel 27

Tangentialebene an die Kugel mit $M(1|2|3)$, $r = 3$ im Punkt $P(3|3|5)$: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor, also

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 5 = 19.$$

Beispiel 28

Kugel und Gerade. Kugel K mit $M(0|0|0)$, $r = 3$, und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen: $1^2 + 2^2 + t^2 = 9 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$. Zwei Lösungen, also ist g eine Sekante mit den Schnittpunkten $S_1(1|2|2)$ und $S_2(1|2|-2)$.

Typischer Fehler

Falsch: Für die Tangente in P den Vektor $\overrightarrow{MP}$ als Richtungsvektor nehmen.

Richtig: $\overrightarrow{MP}$ ist der **Normalenvektor** der Tangentialebene. Der Richtungsvektor einer Tangente steht senkrecht auf $\overrightarrow{MP}$: $\vec{u} \circ \overrightarrow{MP} = 0$.

Ausprobieren: **Kugeln und Körper** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Dreiecksgeometrie: Pythagoras & Strahlensatz** ↗ · **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

5.3 Geradlinige Bewegungen

Bewegt sich ein Objekt mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus, beschreibt eine Geradengleichung seine Bahn – der Parameter ist jetzt die **Zeit**. Der Richtungsvektor gibt an, welche Strecke in einer Zeiteinheit zurückgelegt wird.

Merksatz

$\vec{x}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$: Ort zur Zeit t, Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ (Länge pro Zeiteinheit). Zwei Objekte **stoßen zusammen**, wenn sie zur **selben Zeit** am selben Ort sind – gleiche Bahnpunkte zu verschiedenen Zeiten reichen nicht.

Beispiel 29

Flugzeug F_1 (t in h, Längen in km):

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\vec{v}| = \sqrt{200^2 + 100^2} \approx 224 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Nach einer halben Stunde ist es bei $(100 \mid 50 \mid 1)$. Ein zweites Flugzeug fliegt auf

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bahnen schneiden sich: $200t_1 = 300 - 100t_2$ und $100t_1 = 100t_2$ ergeben $t_1 = t_2 = 1$. Beide sind **zur selben Zeit** im Punkt $(200 \mid 100 \mid 1)$ – ein Zusammenstoß. Wäre $t_1 \neq t_2$, kreuzten sich nur die Bahnen.

Beispiel 30

Kleinster Abstand zweier Flugzeuge: Abstandsvektor $\vec{d}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ bilden; $|\vec{d}(t)|^2$ ist eine quadratische Funktion von t, ihr Minimum findet man mit der Scheitelform oder der Ableitung (ML1 **Extremwertprobleme**).

Zur Vertiefung: **Aufgabe 42** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 43** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 44** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 45** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 46** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 47** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 48** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 49** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 50** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 51** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 4** (Kugel und Ebene, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 5** (Spatprodukt, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Zwei Flugzeuge** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Geraden, Ebenen & Abstände** ↗

5.4 Beweise mit Vektoren nicht im Abi 2027

Aussagen über Figuren lassen sich beweisen, indem man Strecken als Vektoren schreibt und rechnet: Parallelität über Vielfache, Orthogonalität über das Skalarprodukt, gleiche Längen über Beträge. Der Trick bei Teilungsverhältnissen: Man

stellt denselben Vektor auf zwei Wegen dar und vergleicht die Vorfaktoren – das ist erlaubt, weil die beiden Seitenvektoren nicht kollinear sind.

Satz 5.3 (Diagonalen im Parallelogramm)
In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Beweis Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Die Diagonalen sind $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$. Den Schnittpunkt S erreicht man auf zwei Wegen:

$$\overrightarrow{AS} = r\big(\vec{a} + \vec{b}\big) \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AS} = \vec{a} + s\big(\vec{b} - \vec{a}\big).$$

Gleichsetzen und ordnen: $(r - 1 + s)\vec{a} + (r - s)\vec{b} = \vec{0}$. Weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind, müssen beide Vorfaktoren null sein (Satz 1.2): $r = s$ und $r + s = 1$, also $r = s = \frac{1}{2}$.

Satz: In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Mit $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

$$\big(\vec{a} + \vec{b}\big) \circ \big(\vec{b} - \vec{a}\big) = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$$

Satz des Thales Liegt C auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ und Mittelpunkt M, so sind $\overrightarrow{MA} = -\vec{m}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{m}$ und $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ mit $|\vec{c}| = |\vec{m}|$. Dann ist

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = (-\vec{m} - \vec{c}) \circ (\vec{m} - \vec{c}) = -|\vec{m}|^2 + |\vec{c}|^2 = 0\ ,$$

der Winkel bei C ist ein rechter.



6 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS) treten überall auf: beim Bestimmen eines Funktionsterms aus Eigenschaften (ML1 Funktionsterm aus Eigenschaften), beim Schnitt von Geraden und Ebenen, bei der Frage, ob Vektoren komplanar sind. Das Gaußverfahren löst sie mechanisch: Man eliminiert Unbekannte, bis jede Gleichung eine weniger enthält als die darüber, und rechnet dann von unten nach oben zurück. Ohne Rechner hält man die Zahlen klein, indem man geschickt kombiniert.

6.1 Das Gaußverfahren

Satz 6.1 (Gaußverfahren)
Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn man

- zwei Gleichungen vertauscht,
- eine Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert,
- ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert.

Mit diesen Umformungen bringt man jedes LGS auf **Stufenform** und löst es von unten nach oben.

Beweis Erfüllen Zahlen x_1, x_2, x_3 die Gleichungen I und II, dann auch die Gleichung II $+ k \cdot$ I – man addiert ja nur gleiche Zahlen auf beiden Seiten. Umgekehrt erhält man II zurück, indem man von II $+ k \cdot$ I wieder $k \cdot$ I abzieht. Ersetzt man II durch II $+ k \cdot$ I, bleiben die Lösungen also genau dieselben. Für die beiden anderen Umformungen ist es ebenso klar: Sie lassen sich rückgängig machen. ∎

Beispiel 31

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

II $-2 \cdot$ I und III $-$ I:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \\ x_2 - 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$3 \cdot$ III + II: $-7x_3 = -21$, also $x_3 = 3$; aus II: $-3x_2 = -6$, $x_2 = 2$; aus I: $x_1 = 1$. Probe in III: $1 + 4 - 3 = 2$ ✓

Merksatz
Matrixschreibweise: Man schreibt nur die Koeffizienten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Satz 6.2 (Lösungsmenge eines LGS)
Ein lineares Gleichungssystem hat entweder **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen. In der Stufenform erkennt man das so:

- eine Zeile $0 = c$ mit $c \neq 0$: keine Lösung,
- vollständige Stufenform: genau eine Lösung,
- eine Zeile $0 = 0$: eine Variable ist frei wählbar (Parameter t), unendlich viele Lösungen.

Warum nie genau zwei Lösungen? Sind $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ und $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ zwei verschiedene Lösungen, so ist für jede Zahl t auch

$$(x_1 + t(y_1 - x_1) \mid x_2 + t(y_2 - x_2) \mid x_3 + t(y_3 - x_3))$$

eine Lösung: Setzt man sie in eine Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ein, erhält man $d + t(d - d) = d$. Mit zwei Lösungen hat man also schon unendlich viele – geometrisch alle Punkte der Geraden durch die beiden Lösungspunkte. ∎

Beispiel 32

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

II $-$ I ergibt $x_2 + 2x_3 = 3$, III $-2 \cdot$ I ebenfalls $x_2 + 2x_3 = 3$; nach Abzug wird daraus $0 = 0$. Mit $x_3 = t$ folgen $x_2 = 3 - 2t$ und $x_1 = 2 - x_2 - x_3 = -1 + t$:

$$L = \{(-1 + t \mid 3 - 2t \mid t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ändert man die rechte Seite der dritten Gleichung auf 8, entsteht $0 = 1$: keine Lösung.

Ausprobieren: **Gaußverfahren** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Lineare Gleichungssysteme & Gauß** ↗

6.2 Geometrische Deutung

Jede Gleichung mit drei Unbekannten beschreibt eine Ebene im Raum, ein LGS mit drei Gleichungen also drei Ebenen. Die Lösungsmenge sind die Punkte, die auf allen drei Ebenen liegen. Je nachdem, wie die Ebenen zueinander liegen, ist das ein Punkt, eine Gerade, eine ganze Ebene oder gar nichts. Im Abitur soll man diese Deutung zu einem gegebenen LGS formulieren können. In der Ebene ist es dasselbe eine Dimension tiefer: Jede Gleichung mit zwei Unbekannten ist eine Gerade.

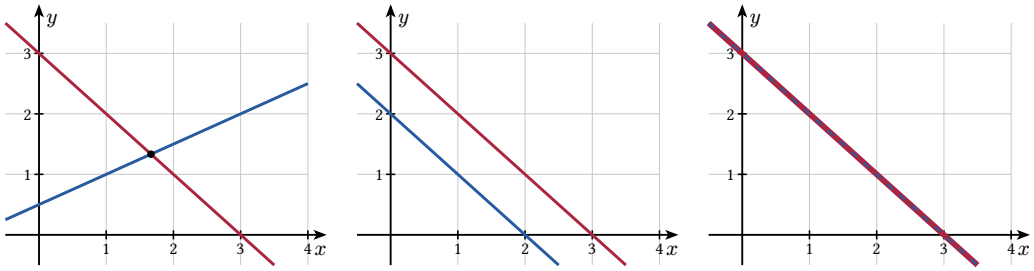


Abbildung 69: Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten: genau eine Lösung (Schnittpunkt), keine Lösung (parallele Geraden), unendlich viele (dieselbe Gerade). Mit drei Unbekannten gilt dasselbe für Ebenen.

Merksatz

Die Lösungsmenge eines 3×3-Systems ist

- ein **Punkt**: die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt,
- eine **Gerade**: alle drei Ebenen enthalten eine gemeinsame Gerade,
- **leer**: es gibt keinen gemeinsamen Punkt (z. B. zwei parallele Ebenen oder drei Ebenen, die sich paarweise in parallelen Geraden schneiden),
- eine **Ebene**: alle drei Gleichungen beschreiben dieselbe Ebene.

Beispiel 33

Das System im vorletzten Beispiel hat die Lösungsmenge $(-1 + t \mid 3 - 2t \mid t)$ – das ist die Parameterform einer Geraden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Ebenen haben diese Gerade gemeinsam, wie die Seiten eines aufgeschlagenen Buchs.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 52** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 53** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 54** (in der Sammlung Abi-ähnlich).

Ausprobieren: **Gaußverfahren** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Lineare Gleichungssysteme & Gauß** ↗