minærva

ML 3

SKRIPT

Stochastik

Erklärskript

Die Aufgaben 6–9 zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Verweise auf Aufgaben sind Links.

Mathematik-LK – Abitur 2027 · Skript 3 von 3

Pirmin Gohn

Nutzungshinweis: Dieses Skript darf nur im Rahmen des Unterrichts und der Abiturvorbereitung verwendet werden; insbesondere ist die eigenständige Weitergabe untersagt.

Skriptreihe ML · Mathematik-Leistungsfach zum Abitur 2027 · Baden-Württemberg · Bildungsplan 2016

ML1 Analysis · Teil B I
ML2 Analytische Geometrie · Teil B II
ML3 Stochastik · Teil B III
ML-K Kompakt

Lernen mit minærva

Dieses Skript ist ein Teil von minærva. Alles gehört zusammen: Jedes Thema führt von der Erklärung zum Üben, zum Ausprobieren und ins große Bild.

minaerva.de

Skripte Verstehen
Der Stoff zum Nachlesen: Erklärungen, Herleitungen, Beispiele und typische Fehler.
minaerva.de

noctua Üben
Fragen und Aufgaben zu jedem Abschnitt, Formeltraining und Aufgaben im Stil des Abiturs, mit sofortiger Rückmeldung.
noctua.minaerva.de

fabrica Ausprobieren
Versuche und Anschauungen zum Selbermessen und Anfassen, ohne Konto, auch auf dem iPad.
fabrica.minaerva.de

tela Vernetzen
Das Wissensnetz: worauf ein Thema aufbaut und wohin es führt.
tela.minaerva.de

So greifen die Skripte ineinander

Erklärskripte	Physik PL1–PL5, das Lernskript PL-Σ und Mathe ML1–ML3 enthalten den Stoff, aber keine Aufgaben.
Aufgabenskripte	Je Fach eines mit den Übungsaufgaben. Die Erklärskripte verweisen darauf; jede Aufgaben-, Abbildungs- und Tabellennummer gibt es je Fach nur einmal.
Abi-ähnlich	Je Fach eine Sammlung mit Aufgaben, wie sie im Abitur vorkommen könnten.
Lösungsskripte	Zu den Aufgabenskripten und zu den Abi-ähnlichen Aufgaben, jeweils je Fach.
Kompakt	Formeln und Abbildungen zum schnellen Wiederholen: PL-K für Physik, ML-K für Mathe, dazu die Formelsammlung.

Am Ende vieler Abschnitte stehen Links zur passenden Übung, zum Versuch und ins Wissensnetz. In der PDF-Datei lassen sie sich direkt antippen.

Inhaltsverzeichnis

Das Abitur 2027 ..... **4**
Ablauf 4
Was geprüft wird 4
Die Marken im Skript 5
Operatoren 5
1 Wahrscheinlichkeiten **6**
1.1 Zufallsexperimente und Ereignisse 6
1.2 Rechenregeln 7
1.3 Mehrstufige Zufallsexperimente 7
1.4 Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit 8
2 Kombinatorik **11**
2.1 Fakultät und Binomialkoeffizient 11
2.2 Zählstrategien 12
3 Zufallsgrößen **13**
3.1 Summenzeichen 13
3.2 Lage- und Streumaße Zusatz 13
3.3 Erwartungswert und Varianz 13
4 Binomialverteilung **16**
4.1 Bernoulli-Ketten 16
4.2 Erwartungswert und Standardabweichung 17
4.3 Rechnen mit der Binomialverteilung 18
5 Hypothesentests **20**
5.1 Grundidee und Aufbau 20
5.2 Einseitige Tests 20
5.3 Fehler erster und zweiter Art 21
5.4 Zweiseitige Tests 22
6 Normalverteilung **23**
6.1 Stetige Zufallsgrößen 23
6.2 Die Normalverteilung 23
6.3 Rückwärts rechnen: inverse Normalverteilung 24
6.4 Binomialverteilung und Normalverteilung 25
6.5 Prognose- und Konfidenzintervall Zusatz 26

Das Abitur 2027

Die Skriptreihe zum Abitur 2027

Drei Skripte decken zusammen den Stoff des Leistungsfachs ab, jedes passend zu einem Sachgebiet von Teil B; die Aufgaben von Teil A stammen aus allen drei. Jedes Skript erklärt ausführlich, beweist die wichtigen Sätze, wo das mit Schulmitteln geht. Die Aufgaben stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Für die letzten Wochen fasst das Kompaktskript ML-K alle Formeln und Abbildungen auf wenigen Seiten zusammen.

	Skript	Bildungsplan 2016, Leistungsfach
ML1	**Analysis**	3.4.4 Funktionaler Zusammenhang, 3.4.2 Messen (Integral); Rechenwerkzeuge aus 3.4.1
ML2	**Analytische Geometrie**	3.4.3 Raum und Form; lineare Gleichungssysteme aus 3.4.1
ML3	**Stochastik**	3.4.5 Daten und Zufall
ML-K	**Kompakt**	alle Formeln, Verfahren und Abbildungen, ohne Erklärungen und Aufgaben

Ablauf

Definition

300 Minuten, Hauptprüfung am 5. Mai 2027.

Teil A – ohne Hilfsmittel: alle vier Pflichtaufgaben P1 bis P4 und zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6, je 5 BE. Abgabe spätestens **110 Minuten** nach Beginn.

Teil B – mit Hilfsmitteln: je eine Aufgabe zu Analysis (I), Analytischer Geometrie (II) und Stochastik (III); die Lehrkraft wählt aus je zwei Vorschlägen aus.

Merksatz

Hilfsmittel in Teil B:

- die mathematisch-naturwissenschaftliche **Formelsammlung des IQB**,
- ein **wissenschaftlicher Taschenrechner** (WTR).

Geodreieck und Zirkel sind in der ganzen Prüfung erlaubt.

Wichtig

Der WTR kann **keine** Gleichungen lösen, **nicht** ableiten oder integrieren und keine Graphen zeichnen. Er kann: Wertetabellen, $n!$, $\binom{n}{k}$, Mittelwert und Standardabweichung, einzelne und **kumulierte** Wahrscheinlichkeiten der Binomial- und der Normalverteilung.

Auch in Teil B wird also von Hand gerechnet.

Was geprüft wird

Merksatz

Bildungsplan 2016, Leistungsfach. Zusätzlich vorausgesetzt: **Umkehrfunktionen** sowie **Varianz** und **Standardabweichung** diskreter Zufallsgrößen.

Wichtig

Nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027:

- Mittelwert einer Funktion mit der Integralrechnung,
- uneigentliche Integrale,
- Näherungsverfahren (z. B. Newton),
- Beweise mit Vektoren.

Im Skript stehen sie mit der Marke nicht im Abi 2027.

Die Marken im Skript

FS	steht in der IQB-Formelsammlung – aber nur in **Teil B** verfügbar
nicht im Abi 2027	nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung 2027
Zusatz	hilfreich, geht aber über den Bildungsplan hinaus

Beweise und Begründungen sind mit einem farbigen Strich am Rand abgesetzt. Sie werden im Abitur selten wörtlich verlangt – aber wer weiß, **warum** eine Regel gilt, wendet sie sicherer an und kann sie notfalls selbst wieder herleiten.

Operatoren

angeben, nennen	ohne Begründung, ohne Rechenweg
berechnen	Rechenweg darstellen
bestimmen, ermitteln	Weg frei wählbar, Lösungsweg zeigen
zeigen, nachweisen	Aussage mit gültigen Schlüssen bestätigen
begründen	Sachverhalt auf Regeln zurückführen
beurteilen	zu einem Urteil kommen und es begründen
untersuchen	Eigenschaften herausfinden, Weg frei
skizzieren	wesentliche Eigenschaften grafisch, ohne Genauigkeit
interpretieren	Ergebnis im Sachzusammenhang deuten

1 Wahrscheinlichkeiten

Die Stochastik beschreibt Vorgänge, deren Ausgang im Einzelfall nicht vorhersagbar ist, die aber auf lange Sicht Regelmäßigkeiten zeigen. Im Abitur geht es um drei Fragen: Wie wahrscheinlich ist ein Ereignis (Baumdiagramm, Vierfeldertafel, Kombinatorik)? Wie ist eine Zufallsgröße verteilt (Binomial- und Normalverteilung, Erwartungswert)? Und wie entscheidet man aufgrund einer Stichprobe über eine Vermutung (Hypothesentest)? Rechnungen mit großen n übernimmt in Teil B der WTR – die Modellierung und die Deutung nicht.
Dieses erste Kapitel klärt die Grundbegriffe und die Rechenregeln, auf denen alles Weitere aufbaut.

1.1 Zufallsexperimente und Ereignisse

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang mit mehreren möglichen Ausgängen, bei dem man nicht vorhersagen kann, welcher eintritt – Würfeln, eine Münze werfen, eine Person zufällig auswählen. Ein **Ereignis** fasst Ergebnisse zusammen, die man gemeinsam betrachtet: „gerade Zahl“ beim Würfeln sind die Ergebnisse 2, 4, 6.

Definition

Ergebnismenge Ω: alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Ein **Ereignis** A ist eine Teilmenge von Ω.
Gegenereignis $\overline{A}$: A tritt nicht ein.
$A \cap B$ („A **und** B“): beide treten ein. $A \cup B$ („A **oder** B“): mindestens eines tritt ein.

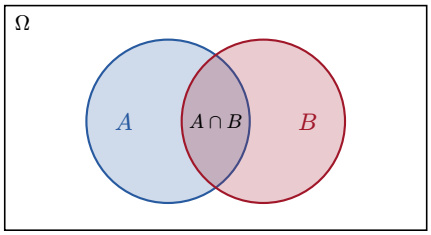


Abbildung 70: Venn-Diagramm: Die Ereignisse A und B als Flächen in der Ergebnismenge Ω; die Überlappung ist $A \cap B$, beide Kreise zusammen sind $A \cup B$.

Was „wahrscheinlich“ heißt, zeigt sich bei vielen Wiederholungen: Die **relative Häufigkeit** eines Ereignisses (Anzahl der Treffer geteilt durch die Anzahl der Versuche) schwankt anfangs stark und pendelt sich dann bei einem festen Wert ein – der Wahrscheinlichkeit (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

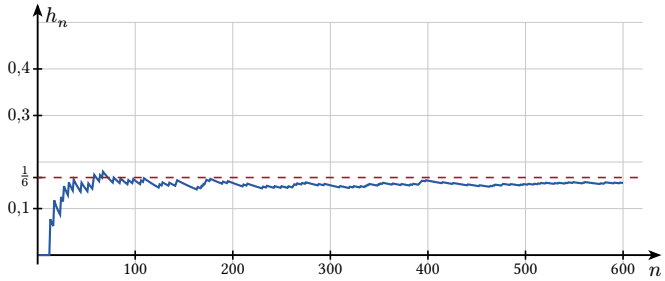


Abbildung 71: Anteil h_n der Sechsen nach n Würfen (simuliert): Er schwankt anfangs stark und nähert sich mit wachsendem n der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Diese Beobachtung lässt sich nicht beweisen – sie ist eine Erfahrungstatsache, auf der die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbaut. Wahrscheinlichkeiten erben deshalb die Eigenschaften relativer Häufigkeiten: Sie liegen zwischen 0 und 1, das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1, und für Ereignisse, die sich ausschließen, addieren sie sich.

Merksatz

Laplace-Experiment (alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, z. B. fairer Würfel, Münze, Ziehen „auf gut Glück“):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}}$$

Begründung Hat Ω genau m gleich wahrscheinliche Ergebnisse, so hat jedes die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$, denn zusammen ergeben sie 1. Ein Ereignis mit $|A|$ Ergebnissen hat dann die Wahrscheinlichkeit $|A| \cdot \frac{1}{m}$.

Beispiel 1
Würfel, A: „gerade Zahl“ $= \{2;4;6\}$: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Zwei Würfel, „Augensumme 7“: Von $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinlichen Paaren sind $(1|6)$, $(2|5)$, …, $(6|1)$ günstig, also $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Die Augensumme selbst ist **nicht** gleichverteilt: Die Summe 2 hat nur die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Ausprobieren: **Zufallsexperimente** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Zufallsvariablen, Erwartungswert & Varianz** ↗

1.2 Rechenregeln

Satz 1.1 (Gegenereignis und Additionssatz)
Für alle Ereignisse A, B gilt $0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$ und

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Beweis A und $\overline{A}$ zerlegen Ω ohne Überlappung, also $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = P(\Omega) = 1$. Beim Additionssatz zählt man in $P(A) + P(B)$ die Überlappung $A \cap B$ doppelt (Venn-Diagramm) und zieht sie deshalb einmal ab. Schließen sich A und B aus ($A \cap B$ leer), gilt einfach $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. ∎

Beispiel 2
Würfel: A „gerade“, B „größer als 3“ $= \{4;5;6\}$. $A \cap B = \{4;6\}$, also

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Probe durch Abzählen: $A \cup B = \{2;4;5;6\}$.

Ausprobieren: **Zufallsexperimente** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Zufallsvariablen, Erwartungswert & Varianz** ↗

1.3 Mehrstufige Zufallsexperimente

Laufen mehrere Zufallsexperimente nacheinander ab, hilft ein Baumdiagramm. Jeder Pfad ist ein Ergebnis; an den Ästen stehen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Stufen, und zwar **unter der Bedingung** des bisherigen Pfads. Oft muss man den Baum gar nicht vollständig zeichnen – es genügen die Pfade, die zum gesuchten Ereignis gehören.

Satz 1.2 (Pfadregeln)
Im Baumdiagramm gilt:

- Wahrscheinlichkeiten **längs** eines Pfades werden **multipliziert**,
- Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade werden **addiert**.

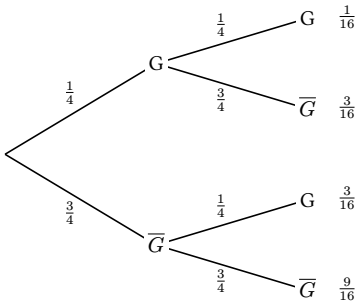


Abbildung 72: Glücksrad mit $P(\text{Grün}) = \frac{1}{4}$, zweimal gedreht: Pfadwahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade.

Warum multipliziert man längs eines Pfads? Denkt man sich das zweimalige Drehen 1600-mal durchgeführt, so kommt beim ersten Drehen etwa in einem Viertel der Fälle, also 400-mal, Grün. Von diesen 400 Fällen bringt der

zweite Dreh wieder in etwa einem Viertel Grün: 100-mal. Das ist der Anteil $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ aller 1600 Fälle. Verschiedene Pfade schließen sich gegenseitig aus, deshalb darf man ihre Wahrscheinlichkeiten addieren.

Beispiel 3

„Genau einmal Grün“: Die Pfade $G\overline{G}$ und $\overline{G}G$, also $\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$.

Wichtig

„Mindestens einmal“ immer über das Gegenereignis „keinmal“:

$$P(\text{mindestens einmal}) = 1 - P(\text{keinmal})$$

Beispiel 4

Wie oft muss man würfeln, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Sechs zu werfen?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12{,}6$$

Mindestens 13 Würfe. (Beim Teilen durch $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ dreht sich das Zeichen um.)

Beispiel 5

Spiel bis zum ersten Treffer. A und B drehen abwechselnd ein Glücksrad mit $P(\text{Grün}) = \frac{1}{3}$; wer zuerst Grün dreht, gewinnt; A beginnt, höchstens vier Drehungen. A gewinnt beim 1. oder 3. Dreh:

$$P(\text{A gewinnt}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} = \frac{13}{27} \approx 0{,}48.$$

Ausprobieren: **Baumdiagramm zum Anfassen** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Kombinatorik & Abzählen** ↗ · **Zufallsvariablen, Erwartungswert & Varianz** ↗

1.4 Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit

Werden zwei Merkmale gleichzeitig betrachtet – krank/gesund und Test positiv/negativ, raucht/raucht nicht und männlich/weiblich –, ordnet man die Wahrscheinlichkeiten in einer Vierfeldertafel. Ihre inneren Felder sind die „und“-Wahrscheinlichkeiten, die Randfelder die Gesamtwahrscheinlichkeiten. Eine bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich nur auf einen Teil der Gesamtheit: Man teilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung statt durch 1.

Definition

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B (mit $P(B) > 0$): FS

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Begründung Weiß man, dass B eingetreten ist, kommen nur noch die Ergebnisse in B in Frage – B wird zur neuen Gesamtheit. Gefragt ist, welchen Anteil davon A ausmacht: der Anteil von $A \cap B$ an B. Mit Häufigkeiten: Von 1000 Personen gehören 200 zu B, davon 50 auch zu A; dann ist $P_B(A) = \frac{50}{200} = \frac{\frac{50}{1000}}{\frac{200}{1000}}$.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P\left(A \cap \overline{B}\right)$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P\left(\overline{A} \cap B\right)$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A}\right)$
	$P(B)$	$P\left(\overline{B}\right)$	1

Tabelle 4: Aufbau der Vierfeldertafel: Jede Zeile und jede Spalte addiert sich zum Randwert.

Beispiel 6

In einer Stufe mit 120 Schülern treiben 45 Vereinssport; von den 70 Mädchen sind es 21.

	Verein (V)	kein Verein	
Mädchen (M)	21	49	70
Jungen	24	26	50
	45	75	120

Die fehlenden Felder ergeben sich durch Subtrahieren. $P_M(V) = \frac{21}{70} = 0{,}3$, aber $P_V(M) = \frac{21}{45} \approx 0{,}47$ – zwei ganz verschiedene Fragen.

Definition

A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn FS

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P_B(A) = P(A)$$

Das Eintreten von B ändert dann nichts an der Wahrscheinlichkeit von A.

Beispiel 7

Im Beispiel oben: $P(V) = \frac{45}{120} = 0{,}375$, aber $P_M(V) = 0{,}3$ – Vereinssport und Geschlecht sind (in dieser Stufe) abhängig.

Allgemein: $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}2$: $P_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4 \neq 0{,}3$ – abhängig.

Satz 1.3 (Unabhängigkeit und Gegenereignis)

Sind A und B unabhängig, so sind auch A und $\overline{B}$ unabhängig (und ebenso $\overline{A}$ und $\overline{B}$).

Beweis A zerfällt in $A \cap B$ und $A \cap \overline{B}$, also

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right).$$

In der Vierfeldertafel bedeutet Unabhängigkeit: **Jedes** innere Feld ist das Produkt seiner beiden Randwerte. Es genügt, das für ein Feld zu prüfen. ∎

Aus der Definition folgt $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$ – das ist genau die Pfadregel im Baumdiagramm. Damit kann man einen Baum „umdrehen“: Kennt man $P_A(B)$, erhält man $P_B(A)$.

Satz 1.4 (Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes)

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

Beweis B zerfällt in die beiden sich ausschließenden Teile $A \cap B$ und $\overline{A} \cap B$. Also ist $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$, und nach der Pfadregel ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$, ebenso für $\overline{A}$. Die zweite Formel ist die Definition $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, in der man den Zähler mit der Pfadregel ersetzt. Im Baumdiagramm: Man addiert alle Pfade, die zu B führen, und fragt, welchen Anteil davon der Pfad über A hat. ∎

Wichtig

Im Abitur genügen meist die Vierfeldertafel oder der umgekehrte Baum – die Formel muss man nicht auswendig können, wenn man die Idee verstanden hat.

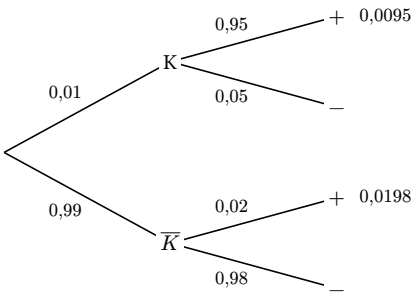


Abbildung 73: Test auf eine seltene Krankheit (1 % krank): $P(+) = 0{,}0095 + 0{,}0198 = 0{,}0293$, aber $P_+(\mathrm{K}) = \frac{0{,}0095}{0{,}0293} \approx 0{,}32$ – zwei Drittel der positiv Getesteten sind gesund.

Typischer Fehler

$P_B(A)$ und $P_A(B)$ verwechseln ist der häufigste Fehler: „Anteil der Kranken unter den positiv Getesteten“ ist $P_+(\mathrm{K})$, „Anteil der positiv Getesteten unter den Kranken“ ist $P_{\mathrm{K}}(+)$. Bei seltenen Krankheiten liegen beide weit auseinander, obwohl der Test gut ist – weil es so viel mehr Gesunde gibt, die falsch positiv getestet werden können.

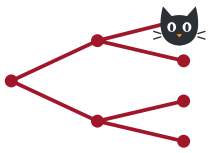
Zur Vertiefung: **Aufgabe 55** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 56** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 61** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 62** (in der Sammlung Abi-ähnlich).

Typischer Fehler

Falsch: Unvereinbare Ereignisse sind unabhängig, also gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Richtig: Unvereinbar heißt $P(A \cap B) = 0$. Haben beide Ereignisse eine positive Wahrscheinlichkeit, sind sie gerade **abhängig**: Tritt A ein, ist B ausgeschlossen.

Ausprobieren: **Baumdiagramm zum Anfassen ↗** · **Medizinischer Test ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Kombinatorik & Abzählen ↗** · **Zufallsvariablen, Erwartungswert & Varianz ↗**



2 Kombinatorik

Bei Laplace-Experimenten muss man Möglichkeiten zählen – und die werden schnell zu viele, um sie aufzuschreiben. Die Kombinatorik liefert dafür Formeln. Fast alle beruhen auf einem einzigen Prinzip: Für jeden Platz zählt man die Möglichkeiten und multipliziert.

2.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Die Fakultät zählt, wie viele Reihenfolgen es für n verschiedene Objekte gibt: Für den ersten Platz hat man n Möglichkeiten, für den zweiten noch $n-1$, und so weiter. Der Binomialkoeffizient zählt dagegen Auswahlen **ohne** Reihenfolge – er wird in der Stochastik (Binomialverteilung, Ziehen ohne Zurücklegen) ständig gebraucht und ist auf dem WTR als nCr abrufbar.

Definition

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

FS Anzahl der Möglichkeiten, k von n Objekten **ohne Beachtung der Reihenfolge** auszuwählen.

Satz 2.1 (Anzahl der Auswahlen)
Aus n verschiedenen Objekten kann man auf $\frac{n!}{(n-k)!}$ Arten k Objekte **nacheinander** (mit Reihenfolge) auswählen und auf $\binom{n}{k}$ Arten **ohne** Reihenfolge. Alle n Objekte lassen sich auf $n!$ Arten anordnen.

Beweis Für den ersten Platz gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten noch $n-1$, und so weiter (Produktregel). Wählt man also k Objekte **nacheinander** aus, hat man $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Dabei wird jede Auswahl so oft gezählt, wie es Reihenfolgen ihrer k Objekte gibt, nämlich $k!$-mal. Also gibt es $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Auswahlen ohne Reihenfolge.

Beispiel 8

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Aus den Buchstaben a, b, c, d, e kann man 10 Paare bilden: ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.

Satz 2.2 (Symmetrie und Pascal'sches Dreieck)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Jede Zahl im Pascal'schen Dreieck ist die Summe der beiden darüber; die Zeile n liefert die Vorfaktoren von $(a+b)^n$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Beweis **Symmetrie:** k Objekte auswählen ist dasselbe, wie die $n-k$ übrigen auszuwählen, die man **nicht** nimmt. **Pascal:** Man markiert eines der n Objekte. Jede k-Auswahl enthält es entweder (dann wählt man noch $k-1$ aus den $n-1$ anderen) oder nicht (dann alle k aus den $n-1$ anderen).

$n=0$					1					
$n=1$				1		1				
$n=2$			1		2		1			
$n=3$		1		3		3		1		
$n=4$	1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5	1

Abbildung 74: Pascal'sches Dreieck: Zeile n enthält $\binom{n}{0}$, …, $\binom{n}{n}$; jede Zahl ist die Summe der beiden schräg darüber.

Ausprobieren: **Kombinatorik** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Kombinatorik & Abzählen** ↗

2.2 Zählstrategien

Kombinatorik ist geschicktes Zählen. Zwei Fragen entscheiden über die Formel: Spielt die Reihenfolge eine Rolle? Darf ein Element mehrfach vorkommen (mit Zurücklegen)? Im Zweifel hilft das Bild einer Urne oder das Ausfüllen von Plätzen: Für jeden Platz zählt man die Möglichkeiten und multipliziert (**Produktregel**).

Merksatz

k-mal aus n Objekten auswählen:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	–	$\binom{n}{k}$

Alle n Objekte anordnen: $n!$ Möglichkeiten.

Beispiel 9

- Vierstellige PIN aus den Ziffern 0 bis 9: $10^4 = 10000$ (geordnet, mit Wiederholung).
- Gold, Silber, Bronze unter 8 Läufern: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (geordnet, ohne Wiederholung).
- Dreimal würfeln, alle Zahlen verschieden: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ von $6^3 = 216$ Ergebnissen, also $P = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$.
- 5 Bücher ins Regal stellen: $5! = 120$ Reihenfolgen.

Satz 2.3 (Ziehen ohne Zurücklegen)

Unter N Kugeln sind M Treffer; man zieht n Kugeln auf einmal. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Beweis Alle Auswahlen von n aus N Kugeln sind gleich wahrscheinlich: $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten. Günstig sind die Auswahlen mit k Treffern: Man wählt k der M Treffer **und** $n-k$ der $N-M$ Nieten – nach der Produktregel $\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$ Möglichkeiten. Das ist **keine** Binomialverteilung: Die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich von Zug zu Zug.

Beispiel 10

Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln, zwei Kugeln gleichzeitig: $P(\text{beide rot}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$ – dasselbe ergibt der Baum: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

Beispiel 11

Lotto „6 aus 49“, genau vier Richtige:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13983816} \approx 0{,}00097$$

Zur Vertiefung: **Aufgabe 58** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 6** (Ziehen ohne Zurücklegen, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Kombinatorik** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Kombinatorik & Abzählen** ↗



3 Zufallsgrößen

Oft interessiert nicht das Ergebnis selbst, sondern eine Zahl, die daraus folgt: der Gewinn bei einem Spiel, die Anzahl der Treffer, die Augensumme. Eine solche Zuordnung heißt **Zufallsgröße**. Ihre wichtigsten Kennzahlen sind der Erwartungswert (Wo liegt der Schwerpunkt?) und die Standardabweichung (Wie stark streuen die Werte?).

3.1 Summenzeichen

Das Summenzeichen ist eine Kurzschrift für lange Summen gleich gebauter Summanden. Unter dem $\sum$ steht, bei welchem Wert der Laufindex beginnt, darüber, wo er endet. Man begegnet ihm beim Erwartungswert, bei der Varianz und bei Ober- und Untersummen der Integralrechnung.

Definition

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Beispiel 12

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

Üben: **noctua** ↗

3.2 Lage- und Streumaße Zusatz

Bevor man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet, beschreibt man oft gemessene Daten. Lagemaße sagen, wo die Werte „im Mittel“ liegen, Streumaße, wie weit sie auseinanderliegen.

Definition

Für eine Datenreihe $x_1, \ldots, x_n$:

- **arithmetisches Mittel** $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,
- **Median**: der mittlere Wert der geordneten Reihe (bei gerader Anzahl: Mittel der beiden mittleren),
- **Quartile** Q_1, Q_3: Mediane der unteren und der oberen Hälfte,
- **empirische Standardabweichung** $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$ – wie stark die Werte um den Mittelwert streuen.

Beispiel 13

Daten 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 10: $\overline{x} = 5$, Median 5, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 6$, $s \approx 2{,}19$. Der Ausreißer 10 verändert den Mittelwert stärker als den Median.

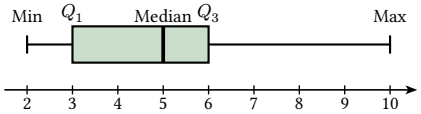


Abbildung 75: Boxplot der Daten: Die Box reicht vom unteren zum oberen Quartil und enthält die mittlere Hälfte der Werte.

3.3 Erwartungswert und Varianz

Der Erwartungswert ist der Mittelwert, den man bei sehr vielen Wiederholungen erwartet; er muss selbst gar nicht vorkommen können (beim Würfeln ist er 3,5). Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert, die Standardabweichung ist ihre Wurzel und hat wieder dieselbe Einheit wie X. Varianz und Standardabweichung setzt der Facherlass 2027 ausdrücklich voraus.

Definition

Eine **Zufallsgröße** X ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu. Ihre **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt $P(X = x_i)$ für alle Werte an. FS

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i), \quad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Warum ist das der „Mittelwert auf lange Sicht“? Wiederholt man das Experiment N-mal, tritt der Wert x_i ungefähr $N \cdot P(X = x_i)$-mal auf. Der Durchschnitt aller Werte ist dann

$$\frac{x_1 \cdot NP(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot NP(X = x_n)}{N} = \sum x_i P(X = x_i).$$

Die Varianz ist auf dieselbe Weise der Durchschnitt der quadrierten Abstände zum Mittelwert.

Beispiel 14

x_i	0	1	4
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

$\mu = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}1$

$V = (0 - 1{,}1)^2 \cdot 0{,}5 + (1 - 1{,}1)^2 \cdot 0{,}3 + (4 - 1{,}1)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}605 + 0{,}003 + 1{,}682 = 2{,}29$, $\sigma \approx 1{,}51$.

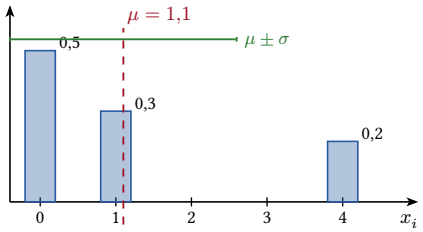


Abbildung 76: Verteilung aus dem Beispiel: Der Erwartungswert $\mu = 1{,}1$ ist der „Schwerpunkt“ der Balken; der grüne Bereich $\mu \pm \sigma$ zeigt die typische Streuung.

Merksatz

Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns (Auszahlung minus Einsatz) null ist.

Beispiel 15

Einsatz 2 €; man würfelt einmal und erhält bei einer Sechs 10 €, sonst nichts. Gewinn G: 8 € mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, -2 € mit $\frac{5}{6}$.

$$E(G) = 8 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} \approx -0{,}33$$

Auf lange Sicht verliert man pro Spiel etwa 33 Cent. Fair wäre das Spiel bei einer Auszahlung a mit $(a - 2) \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{5}{6} = 0$, also $a = 12$ €.

Satz 3.1 (Verschiebungssatz Zusatz**)**

$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$ – oft schneller zu rechnen.

Beweis Ausmultiplizieren: $\sum (x_i - \mu)^2 p_i = \sum x_i^2 p_i - 2\mu \sum x_i p_i + \mu^2 \sum p_i = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$, denn $\sum x_i p_i = \mu$ und $\sum p_i = 1$. ∎

Satz 3.2 (Lineare Transformation)

Für Zahlen a, b und die Zufallsgröße $Y = aX + b$ gilt

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b, \qquad V(aX + b) = a^2 \cdot V(X), \qquad \sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X).$$

Beweis Y nimmt die Werte $ax_i + b$ mit denselben Wahrscheinlichkeiten p_i an:

$$E(Y) = \sum (ax_i + b)p_i = a\sum x_i p_i + b\sum p_i = a\mu + b.$$

Die Abweichungen vom Erwartungswert sind $(ax_i + b) - (a\mu + b) = a(x_i - \mu)$, ihre Quadrate also $a^2(x_i - \mu)^2$; daraus folgt $V(Y) = a^2 V(X)$. ∎

Beispiel 16

Ein Spiel kostet 2 € Einsatz, ausgezahlt werden 3 € pro gewürfeltem Auge. Gewinn $G = 3X - 2$ mit der Augenzahl X ($E(X) = 3{,}5$, $\sigma(X) \approx 1{,}71$):

$$E(G) = 3 \cdot 3{,}5 - 2 = 8{,}5 \quad €, \qquad \sigma(G) = 3 \cdot 1{,}71 \approx 5{,}12 \quad € .$$

Der Einsatz verschiebt nur, er ändert die Streuung nicht.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 59** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 60** (in der Sammlung Abi-ähnlich).

Ausprobieren: **Erwartungswert und Varianz** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Zufallsvariablen, Erwartungswert & Varianz** ↗



4 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist das wichtigste Modell der Schulstochastik: Ein Experiment mit zwei Ausgängen (Treffer/Niete) wird n-mal unabhängig wiederholt, die Trefferwahrscheinlichkeit p bleibt gleich. Gezählt wird die Anzahl der Treffer. Beispiele: Anzahl der Sechsen bei 50 Würfen, Anzahl defekter Teile in einer Stichprobe aus einer großen Produktion, Anzahl der Personen in einer Umfrage, die einem Vorschlag zustimmen.

4.1 Bernoulli-Ketten

Definition

Bernoulli-Kette der Länge n: n-mal dasselbe Experiment mit zwei Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit p), unabhängig voneinander. X = Anzahl der Treffer heißt **binomialverteilt**, $X \sim B(n;p)$.

Satz 4.1 (Bernoulli-Formel)

FS Für $X \sim B(n;p)$ und $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ ist

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

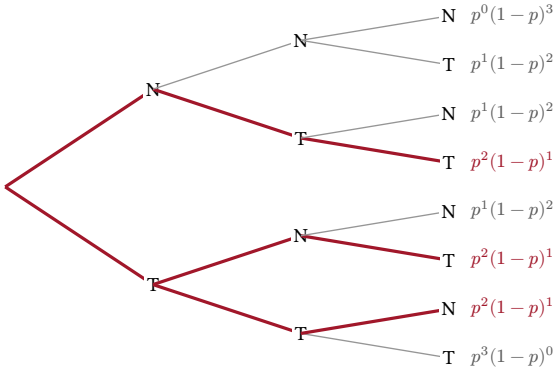


Abbildung 77: Bernoulli-Kette der Länge 3 (T Treffer, N Niete): Genau $\binom{3}{2} = 3$ Pfade (rot) haben zwei Treffer, jeder mit der Wahrscheinlichkeit $p^2(1-p)$.

Beweis Ein Pfad mit genau k Treffern und $n-k$ Nieten hat nach der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$ – egal, an welchen Stellen die Treffer stehen. Wie viele solche Pfade gibt es? Man muss aus den n Stufen die k Stufen auswählen, an denen ein Treffer steht: $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Nach der Summenregel ist $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. ∎

Beispiel 17

Dreimal würfeln, X = Anzahl der Sechsen, $X \sim B\left(3;\frac{1}{6}\right)$:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \approx 0{,}069$$

Wichtig

Die Bedingungen prüfen: nur zwei Ausgänge, p bleibt gleich (Ziehen **mit** Zurücklegen bzw. sehr große Gesamtheit), Versuche unabhängig. Zieht man 10 Personen aus einer Stadt mit 100000 Einwohnern, ändert sich p durch das Ziehen praktisch nicht – man darf binomial rechnen. Zieht man 3 Kugeln aus einer Urne mit 10 Kugeln ohne Zurücklegen, nicht.

Satz 4.2 (Symmetrie der Binomialverteilung)

Ist $X \sim B(n;p)$ und $Y \sim B(n;1-p)$, so gilt $P(X=k) = P(Y=n-k)$.

Beweis k Treffer bei Trefferwahrscheinlichkeit p sind $n-k$ Nieten – also $n-k$ „Treffer“, wenn man die Rollen von Treffer und Niete tauscht. Rechnerisch: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k}(1-p)^{n-k}p^k$ wegen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Satz 2.2). ∎

Ausprobieren: **Galtonbrett und Binomialverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Binomialverteilung** ↗ · **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

4.2 Erwartungswert und Standardabweichung

Satz 4.3 (Erwartungswert und Standardabweichung)
Für $X \sim B(n;p)$: FS

$$\mu = E(X) = n \cdot p, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Beweis Man schreibt $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, wobei $X_i = 1$ ist, wenn die i-te Stufe ein Treffer ist, sonst 0. Jedes X_i hat den Erwartungswert $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$. Erwartungswerte addieren sich (der Durchschnitt einer Summe ist die Summe der Durchschnitte), also $E(X) = np$. Ebenso hat jedes X_i die Varianz $(1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)$; bei **unabhängigen** Stufen addieren sich auch die Varianzen: $V(X) = np(1-p)$. ∎

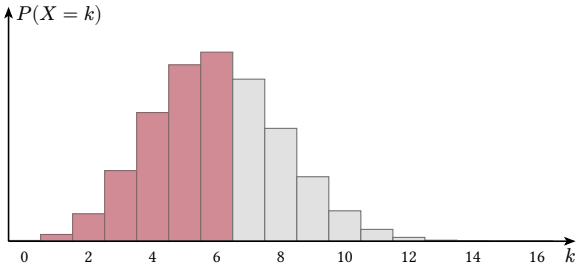


Abbildung 78: $B(20;0{,}3)$ mit $\mu = 6$ und $\sigma \approx 2{,}05$; rot: $P(X \leq 6) \approx 0{,}608$.

Satz 4.4 (Lage des Maximums Zusatz**)**
Das Histogramm von $B(n;p)$ steigt, solange $k < np - (1-p)$ ist, und fällt danach. Das Maximum liegt also bei oder neben $\mu = np$. Die Verteilung ist umso breiter, je größer σ ist.

Beweis Man vergleicht zwei benachbarte Balken. Mit der Bernoulli-Formel kürzt sich fast alles:

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}.$$

Der nächste Balken ist höher, wenn dieser Quotient größer als 1 ist, also wenn $(n-k)p > (k+1)(1-p)$, umgeformt $k < np - (1-p)$. Weil $0 < 1-p < 1$ ist, wechselt das Steigen in Fallen genau bei einer der beiden ganzen Zahlen neben np (bzw. zwischen $np-1$ und np). ∎

Beispiel 18
$B(20;0{,}3)$: $np - (1-p) = 6 - 0{,}7 = 5{,}3$. Bis $k = 5$ steigt das Histogramm, $P(X=6)$ ist der höchste Balken – vergleiche die Abbildung von $B(20;0{,}3)$ oben.

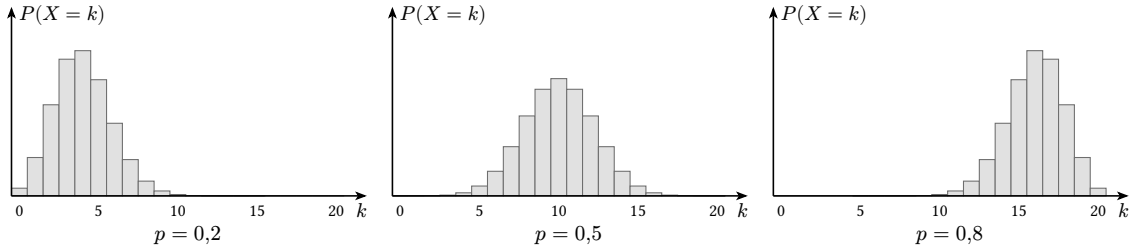


Abbildung 79: $B(20;p)$: Das Maximum liegt bei $\mu = 20p$; für $p = 0{,}5$ ist die Verteilung symmetrisch, p und $1-p$ ergeben Spiegelbilder.

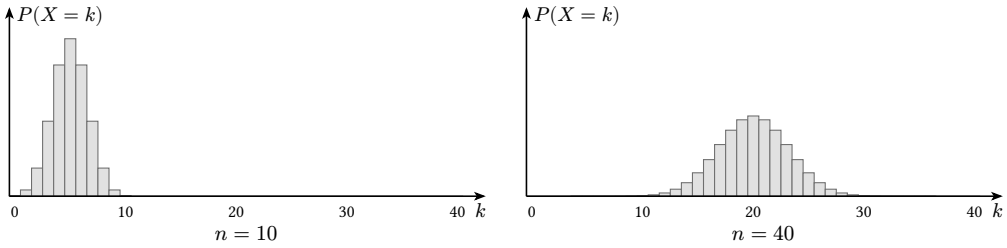


Abbildung 80: Mit wachsendem n wird die Verteilung breiter und flacher ($\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ wächst) und nähert sich einer Glockenform.

Typischer Fehler

Falsch: $\sigma = n \cdot p \cdot (1-p)$.

Richtig: Das ist die Varianz. Die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Ausprobieren: **Galtonbrett und Binomialverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Binomialverteilung** ↗ · **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

4.3 Rechnen mit der Binomialverteilung

Merksatz

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ liefert der WTR. Alles andere führt man darauf zurück:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1), \quad P(X < k) = P(X \leq k-1)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$$

Beispiel 19

$X \sim B(20; 0{,}3)$: $P(X = 6) \approx 0{,}192$, $P(X \leq 6) \approx 0{,}608$, $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}228$.

Beispiel 20

Abweichung vom Erwartungswert. $X \sim B(100; 0{,}3)$, $\mu = 30$, $\sigma \approx 4{,}58$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um höchstens 2σ (also höchstens 9) von μ ab?

$$P(21 \leq X \leq 39) = P(X \leq 39) - P(X \leq 20) \approx 0{,}963$$

Typische Abituraufgaben drehen die Frage um: Nicht P ist gesucht, sondern n oder p. Bei „mindestens ein Treffer“ hilft wieder das Gegenereignis, denn $P(X = 0) = (1-p)^n$ lässt sich nach n oder p auflösen.

Beispiel 21

Gesucht n: Wie oft muss man ein Glücksrad mit $P(\text{Grün}) = \frac{1}{3}$ drehen, damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal Grün kommt?

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}95 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}05 \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 7{,}4$$

Also mindestens 8-mal.

Beispiel 22

Gesucht p: Wie groß muss die Trefferwahrscheinlichkeit sein, damit bei 10 Versuchen mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Treffer fällt?

$$1 - (1-p)^{10} \geq 0{,}9 \Rightarrow (1-p)^{10} \leq 0{,}1 \Rightarrow 1 - p \leq 0{,}1^{0{,}1} \approx 0{,}794 \Rightarrow p \geq 0{,}206$$

Zur Vertiefung: **Aufgabe 57** (in der Sammlung Abi-ähnlich) und **Aufgabe 64** (in der Sammlung Abi-ähnlich).

Typischer Fehler

Falsch: $P(\text{mehr als } 5 \text{ Treffer}) = 1 - P(X \leq 6)$.

Richtig: „Mehr als 5“ heißt $X \geq 6$, also $1 - P(X \leq 5)$. Vor dem Rechnen übersetzen: „höchstens k“ ist $P(X \leq k)$, „weniger als k“ ist $P(X \leq k-1)$, „mindestens k“ ist $1 - P(X \leq k-1)$.

Ausprobieren: **Galtonbrett und Binomialverteilung ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Binomialverteilung ↗** · **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz ↗**



5 Hypothesentests

Ein Hypothesentest ist ein Entscheidungsverfahren: Man hat eine Vermutung über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit und will anhand einer Stichprobe entscheiden, ob man sie verwirft. Die Logik ist die eines Indizienbeweises. Man nimmt die Nullhypothese als wahr an und fragt, ob das beobachtete Ergebnis unter dieser Annahme sehr unwahrscheinlich ist. Wenn ja, spricht es gegen die Nullhypothese – beweisen lässt sich dabei nichts, man kann sich in beide Richtungen irren.

5.1 Grundidee und Aufbau

Definition

Eine Vermutung über die Trefferwahrscheinlichkeit p wird mit einer Stichprobe vom Umfang n überprüft. Die **Nullhypothese** H_0 wird abgelehnt, wenn die Trefferzahl im **Ablehnungsbereich** K liegt – einem Bereich, der unter H_0 nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit erreicht wird.

Merksatz

- **linksseitig:** $H_0 : p \geq p_0$, $K = \{0; \ldots; k\}$ (wenige Treffer sprechen gegen H_0),
- **rechtsseitig:** $H_0 : p \leq p_0$, $K = \{k; \ldots; n\}$ (viele Treffer sprechen gegen H_0),
- **zweiseitig:** $H_0 : p = p_0$, K an beiden Enden, je höchstens $\frac{\alpha}{2}$.

Die Nullhypothese so wählen, dass ihre irrtümliche Ablehnung die Folge ist, die man vermeiden will.

Definition

Signifikanzniveau α: vorgegebene Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art. FS

Irrtumswahrscheinlichkeit: tatsächliche Wahrscheinlichkeit $P_{p_0}(X \in K) \leq \alpha$.

Vorgehen

a) Hypothesen H_0 und H_1 formulieren, Testart festlegen,

b) Zufallsgröße angeben: X = Anzahl der Treffer, unter H_0 binomialverteilt mit n und p_0 (beim einseitigen Test der Grenzfall $p = p_0$),

c) K so groß wie möglich wählen, sodass $P(X \in K) \leq \alpha$,

d) Entscheidungsregel formulieren und im Sachzusammenhang deuten.

Ausprobieren: **Hypothesentest: Ablehnungsbereich ziehen ↗** · **Hypothesentest simulieren ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Hypothesentests & Konfidenzintervalle ↗**

5.2 Einseitige Tests

Beispiel 23

Linksseitig. Eine Partei hatte 40% Zustimmung; sie befürchtet einen Rückgang. $H_0 : p \geq 0{,}4$ (kein Rückgang), $n = 100$, $\alpha = 5\%$.

$P(X \leq 31) \approx 0{,}040 \leq 0{,}05$, aber $P(X \leq 32) \approx 0{,}062 > 0{,}05$.

$K = \{0; \ldots; 31\}$, Irrtumswahrscheinlichkeit $\approx 4{,}0\%$.

Entscheidungsregel: Stimmen höchstens 31 der Befragten zu, wird H_0 abgelehnt – man geht von einem Rückgang aus.

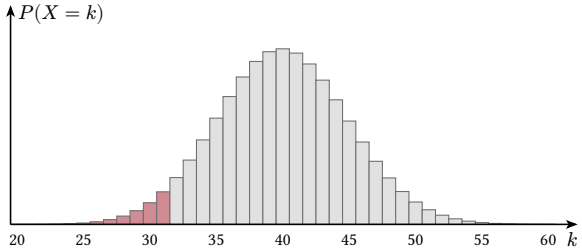


Abbildung 81: $B(100; 0{,}4)$ mit dem Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; 31\}$ (rot): Unter H_0 landet man dort nur mit etwa 4% Wahrscheinlichkeit.

Beispiel 24

Rechtsseitig. Ein Hersteller garantiert höchstens 5% Ausschuss. Ein Kunde prüft 200 Teile. $H_0 : p \leq 0{,}05$, $\alpha = 5\%$.
$P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) \approx 0{,}044 \leq 0{,}05$, aber $P(X \geq 15) \approx 0{,}078$.
$K = \{16; \ldots; 200\}$: Bei 16 oder mehr defekten Teilen wird die Garantie angezweifelt.

Ausprobieren: **Hypothesentest: Ablehnungsbereich ziehen ↗** · **Hypothesentest simulieren ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Hypothesentests & Konfidenzintervalle ↗**

5.3 Fehler erster und zweiter Art

	H_0 wahr	H_0 falsch
H_0 abgelehnt	**Fehler 1. Art** ($\leq \alpha$)	richtig
nicht abgelehnt	richtig	**Fehler 2. Art**

Tabelle 5: Vier mögliche Ausgänge einer Testentscheidung.

Den Fehler 1. Art kontrolliert man über α. Den Fehler 2. Art kann man nur berechnen, wenn man eine konkrete **andere** Trefferwahrscheinlichkeit annimmt: Es ist die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Wahrscheinlichkeit **nicht** in K zu landen.

Beispiel 25

Im linksseitigen Test oben ist in Wirklichkeit $p = 0{,}3$. Fehler 2. Art: $P_{0{,}3}(X \geq 32) = 1 - P_{0{,}3}(X \leq 31) \approx 0{,}37$. In mehr als einem Drittel der Fälle würde der Rückgang also nicht erkannt. Bei $p = 0{,}35$ (kleinerer Rückgang) wären es sogar $\approx 0{,}77$.

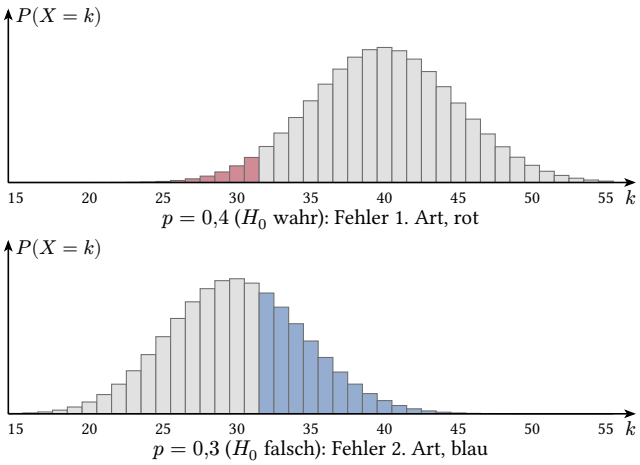


Abbildung 82: Derselbe Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; 31\}$ unter zwei Wahrscheinlichkeiten. Oben fällt man fälschlich in K (Fehler 1. Art), unten fälschlich nicht (Fehler 2. Art).

Merksatz

Größerer Stichprobenumfang n (bei gleichem α): Fehler 2. Art wird kleiner. Kleineres α: Fehler 1. Art seltener, Fehler 2. Art häufiger – man kann nicht beide Fehler zugleich beliebig klein machen, ohne n zu erhöhen.

Typischer Fehler

Falsch: „Der Test hat H_0 nicht verworfen, also ist H_0 bewiesen."
Richtig: Ein Test kann H_0 nur verwerfen oder nicht verwerfen. Wird sie nicht verworfen, reichen die Daten nur nicht für einen Widerspruch; die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art kann dabei groß sein.

Ausprobieren: **Hypothesentest: Ablehnungsbereich ziehen ↗** · **Hypothesentest simulieren ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Hypothesentests & Konfidenzintervalle ↗**

5.4 Zweiseitige Tests

Beispiel 26

Zweiseitiger Test: Ist eine Münze fair? $H_0 : p = 0{,}5$, $n = 100$, $\alpha = 5\%$, also höchstens 2,5% an jedem Ende.
Links: $P(X \leq 39) \approx 0{,}018 \leq 0{,}025$, aber $P(X \leq 40) \approx 0{,}028$. Rechts (symmetrisch): $P(X \geq 61) \approx 0{,}018$.
$K = \{0; \ldots; 39\} \cup \{61; \ldots; 100\}$, Irrtumswahrscheinlichkeit $\approx 3{,}5\%$.

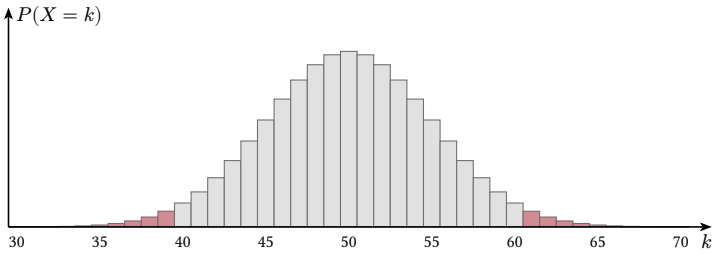


Abbildung 83: Zweiseitiger Test, $H_0 : p = 0{,}5$, $n = 100$: Ablehnungsbereich an beiden Enden (rot), je höchstens 2,5%.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 7** (Zweiseitiger Test, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Hypothesentest simulieren** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Hypothesentests & Konfidenzintervalle** ↗



6 Normalverteilung

Bei stetigen Zufallsgrößen – Körpergrößen, Füllmengen, Messwerte – ist die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wert null; sinnvoll sind nur Wahrscheinlichkeiten für Intervalle. Sie sind Flächen unter der Dichtefunktion. Die Normalverteilung mit ihrer Glockenkurve ist das häufigste Modell: Sie entsteht immer dann, wenn sich viele kleine, voneinander unabhängige Einflüsse überlagern.

6.1 Stetige Zufallsgrößen

Definition

Eine **stetige** Zufallsgröße kann jeden Wert eines Intervalls annehmen. Wahrscheinlichkeiten sind Flächen unter der **Dichtefunktion** f:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ , \quad P(X = a) = 0$$

Eine Dichtefunktion ist nie negativ, und die Gesamtfläche unter ihr ist 1.

Warum ist $P(X = a) = 0$? Ein einzelner Wert ist ein Intervall der Breite null – die Fläche darüber ist null. Anschaulich: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person **exakt** 170,000… cm groß ist, ist null; sinnvoll ist nur „zwischen 169,5 und 170,5 cm“. Deshalb ist bei stetigen Zufallsgrößen $P(X \le a) = P(X < a)$.

Typischer Fehler

Falsch: Bei einer normalverteilten Zufallsgröße $P(X = 3)$ als Wert der Dichte $\varphi(3)$ angeben.
Richtig: Für stetige Zufallsgrößen ist $P(X = 3) = 0$. Wahrscheinlichkeiten sind Flächen unter der Dichtefunktion über Intervallen; deshalb ist auch $P(X \le 3) = P(X < 3)$.

Ausprobieren: **Normalverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

6.2 Die Normalverteilung

Definition

Die Dichte der **Normalverteilung** mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ist FS

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

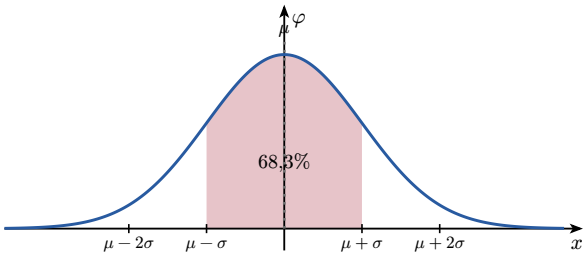


Abbildung 84: Glockenkurve: Zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegen etwa 68,3% der Wahrscheinlichkeit; dort sind auch die Wendestellen.

Satz 6.1 (Eigenschaften der Glockenkurve)

- Glockenkurve symmetrisch zu $x = \mu$, Maximum $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ bei μ, Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$.
- Größeres σ: breiter und flacher (Gesamtfläche bleibt 1).
- $P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ – mit dem WTR.

Beweis der Symmetrie und der Wendestellen φ hängt von x nur über $(x-\mu)^2$ ab; Stellen gleichen Abstands von μ haben denselben Wert – das ist die Symmetrie, und das Maximum liegt bei $x = \mu$, wo der Exponent am größten (nämlich null) ist. Mit $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ und der Kettenregel ist $\varphi'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \varphi(x)$ und mit der Produktregel

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\sigma^2}\varphi(x) + \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sigma^2} \cdot \left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right).$$

Weil $\varphi(x) > 0$ ist, ist $\varphi''(x) = 0$ genau für $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = 1$, also $x = \mu \pm \sigma$; dort wechselt φ'' das Vorzeichen.

Merksatz

σ-Regeln FS

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$$

Beispiel 27

Körpergröße X normalverteilt mit $\mu = 170$ cm, $\sigma = 8$ cm:
$P(162 \le X \le 178) \approx 68{,}3\%$, $P(X \ge 186) \approx \frac{100\% - 95{,}4\%}{2} = 2{,}3\%$ (Symmetrie: die Hälfte des Rests liegt rechts).

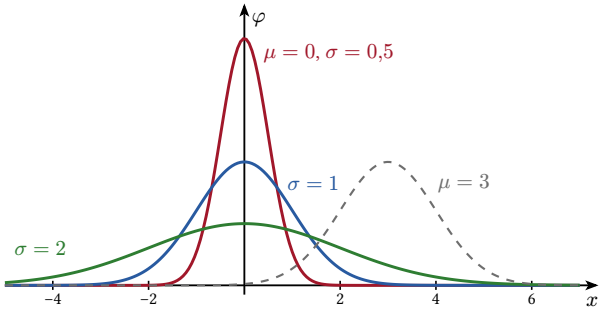


Abbildung 85: Größeres σ: breiter und flacher, die Fläche bleibt 1. Anderes μ: dieselbe Glocke, verschoben.

Ausprobieren: **Normalverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

6.3 Rückwärts rechnen: inverse Normalverteilung

Oft ist nicht die Wahrscheinlichkeit gesucht, sondern eine **Grenze**: Welche Füllmenge wird von 95% der Packungen überschritten? Wie groß muss der Erwartungswert sein, damit höchstens 2% zu leicht sind? Der WTR kann das: Die **inverse Normalverteilung** liefert zu einer Fläche p **links** der Grenze die Stelle k mit $P(X \le k) = p$ (Eingabe: Fläche, σ, μ).

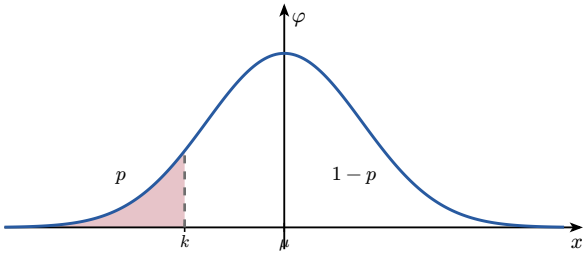


Abbildung 86: Inverse Normalverteilung: Zur Fläche p links von k gibt der WTR die Grenze k. Hier $p = 0{,}1$, also $k \approx \mu - 1{,}28\sigma$.

Merksatz

Grenze gesucht (μ und σ bekannt): die Bedingung immer auf die Form $P(X \le k) = p$ bringen, dann die inverse Normalverteilung.

- $P(X \le k) = p$: direkt eingeben,
- $P(X \ge k) = p$: $P(X \le k) = 1 - p$,
- kleinstes Intervall mit Wahrscheinlichkeit p: symmetrisch um μ, $P(\mu - c \le X \le \mu + c) = p$; links davon bleibt $\frac{1-p}{2}$, also $P(X \le \mu - c) = \frac{1-p}{2}$.

Warum ist das symmetrische Intervall das kleinste? Die Dichte ist bei μ am größten und fällt nach beiden Seiten gleich ab. Verschiebt man ein Intervall fester Länge aus der Mitte heraus, gewinnt es am einen Ende weniger Fläche, als es am anderen verliert. Für dieselbe Wahrscheinlichkeit muss ein verschobenes Intervall also länger sein.

Beispiel 28

Füllmenge X einer Packung normalverteilt mit $\mu = 500$ g, $\sigma = 4$ g.

- Grenze, die 95% der Packungen überschreiten: $P(X \geq k) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(X \leq k) = 0{,}05$, inverse Normalverteilung: $k \approx 493{,}4$ g.
- Kleinstes Intervall, in dem 80% der Füllmengen liegen: $P(X \leq 500 - c) = 0{,}1$ liefert $500 - c \approx 494{,}9$, also $c \approx 5{,}1$ und das Intervall $[494{,}9;\, 505{,}1]$.

Satz 6.2 (Standardisieren)

Ist X normalverteilt mit μ und σ, so ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1 (**Standardnormalverteilung**). Es gilt

$$P(X \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right).$$

Ist z die Stelle mit $P(Z \leq z) = p$, so ist die zugehörige Grenze für X

$$k = \mu + z \cdot \sigma.$$

Begründung Abziehen von μ verschiebt die Glockenkurve, bis sie bei 0 ihr Maximum hat; Teilen durch σ streckt oder staucht sie auf die Breite der Standardnormalverteilung. Dabei wandert die Grenze k nach $\frac{k-\mu}{\sigma}$, die Fläche links davon bleibt dieselbe. Umgekehrt: $\frac{k-\mu}{\sigma} = z$ nach k aufgelöst ergibt $k = \mu + z\sigma$ – die Grenze liegt z Standardabweichungen neben μ.

Merksatz

μ oder σ unbekannt: Der WTR löst keine Gleichung $P(X \leq k) = p$ nach μ oder σ. Man bestimmt deshalb mit der inversen Normalverteilung für $\mu = 0$, $\sigma = 1$ die Stelle z und löst $k = \mu + z\sigma$ von Hand nach der Unbekannten auf.

Beispiel 29

Eine Maschine füllt mit $\sigma = 4$ g ab. Höchstens 2% der Packungen sollen weniger als 500 g enthalten. Wie groß muss μ mindestens sein?

$P(Z \leq z) = 0{,}02$ liefert $z \approx -2{,}054$. Aus $500 = \mu + (-2{,}054) \cdot 4$ folgt $\mu \approx 508{,}2$ g.

Beispiel 30

Ohne WTR (Teil A) helfen die σ-Regeln: X ist normalverteilt mit $\mu = 100$, und etwa 2,3% der Werte liegen über 115. Wegen $\frac{100\%-95{,}4\%}{2} \approx 2{,}3\%$ ist $115 = \mu + 2\sigma$, also $\sigma = 7{,}5$.

Typischer Fehler

Falsch: Bei $P(X \geq k) = 0{,}9$ die Fläche 0,9 in die inverse Normalverteilung eingeben.

Richtig: Der WTR rechnet mit der Fläche **links** der Grenze: $P(X \leq k) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Zur Kontrolle: Wenn 90% über k liegen, muss k links von μ liegen.

Ausprobieren: **Normalverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

6.4 Binomialverteilung und Normalverteilung

Viele Größen – Messwerte, Summen vieler zufälliger Einflüsse, Binomialverteilungen mit großem n – sind **annähernd normalverteilt**. Bei der Binomialverteilung sieht man das direkt: Legt man über das Histogramm von $B(n;p)$ die Glockenkurve mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, passen beide umso besser zusammen, je größer σ ist (Faustregel: $\sigma > 3$).

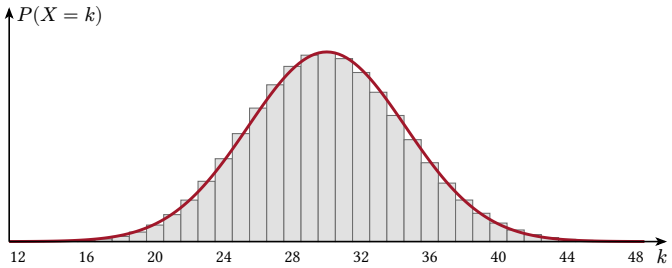


Abbildung 87: $B(100;0{,}3)$ und die Glockenkurve mit $\mu = 30$, $\sigma = \sqrt{21} \approx 4{,}58$: Die Normalverteilung beschreibt die Binomialverteilung hier sehr gut.

Beispiel 31

Für $X \sim B(100;0{,}3)$ liefert die 2σ-Regel $P(21 \le X \le 39) \approx 95\%$; exakt ist es $96{,}3\%$ – die Regel gibt eine gute erste Einschätzung.

Ausprobieren: **Normalverteilung** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Normalverteilung & zentraler Grenzwertsatz** ↗

6.5 Prognose- und Konfidenzintervall Zusatz

Satz 6.3 (Prognose- und Konfidenzintervall)

Für großes n ($np(1-p) > 9$) ist die relative Häufigkeit $h = \frac{X}{n}$ annähernd normalverteilt mit $\mu = p$ und $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

FS

- **Prognoseintervall** (bekanntes p): mit etwa 95% Wahrscheinlichkeit liegt h in

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

- **Konfidenzintervall** (unbekanntes p, gemessenes h): alle p, für die h im Prognoseintervall liegt, also die Lösungen von

$$|h - p| \le 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Beispiel 32

$p = 0{,}3$, $n = 200$: $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}21}{200}} \approx 0{,}064$, Prognoseintervall $[0{,}236;\, 0{,}364]$. Liegt bei einer Umfrage der Anteil außerhalb, spricht das gegen $p = 0{,}3$.

Herleitung Für die Trefferzahl $X \sim B(n;p)$ gilt $E(X) = np$ und $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ (Satz 4.3). Die relative Häufigkeit $h = \frac{1}{n}X$ ist eine lineare Transformation von X (Satz 3.2):

$$E(h) = \frac{1}{n} \cdot np = p, \qquad \sigma(h) = \frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Weil X für großes n annähernd normalverteilt ist, liegt h mit etwa 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $p \pm 1{,}96\sigma(h)$ – das ist die $1{,}96\sigma$-Regel der Normalverteilung. Das Konfidenzintervall dreht die Frage um: Es sammelt alle p, die das gemessene h „erklären“ würden. ∎

Beispiel 33

Konfidenzintervall. Von 400 Befragten stimmen 180 zu, $h = 0{,}45$. Gesucht sind alle p mit $|0{,}45 - p| \le 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}$. Quadrieren ergibt eine quadratische Ungleichung in p:

$$(0{,}45 - p)^2 \le 0{,}009604 \cdot p(1-p) \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}009604p^2 - 0{,}909604p + 0{,}2025 \le 0.$$

Die Lösungsformel liefert die Grenzen $p_1 \approx 0{,}402$ und $p_2 \approx 0{,}499$. Mit 95% Sicherheit liegt der wahre Anteil zwischen 40,2% und 49,9% – eine Mehrheit ist durch die Umfrage nicht belegt. Näherungsweise (mit h statt p unter der Wurzel): $0{,}45 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{400}} = 0{,}45 \pm 0{,}049$.

Satz 6.4 (Notwendiger Stichprobenumfang Zusatz **)**
Soll das 95%-Prognoseintervall für **jedes** p höchstens die halbe Breite ε haben, genügt

$$n \geq \left(\frac{1{,}96}{2\varepsilon}\right)^2.$$

Beweis Es ist $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, denn $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Also ist die halbe Breite $1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 1{,}96 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$, und das ist höchstens ε, wenn $\sqrt{n} \geq \frac{1{,}96}{2\varepsilon}$. ∎

Beispiel 34
Eine Umfrage soll auf ± 3 Prozentpunkte genau sein: $n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}06}\right)^2 \approx 1067$ Befragte. Deshalb haben seriöse Wahlumfragen meist rund 1000 Teilnehmer.

Wichtig
Je größer n, desto schmaler das Intervall – aber nur mit $\sqrt{n}$: Für ein halb so breites Intervall braucht man die **vierfache** Stichprobe.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 63** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 8** (Inverse Normalverteilung, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 9** (Konfidenzintervall, im Aufgabenskript).

