minærva

PL 1

SKRIPT

Schwingungen

Erklärskript

Die Aufgaben 1–21 zu diesem Skript stehen im Aufgabenskript, die Lösungen im Lösungsskript. Verweise auf Aufgaben sind Links.

Physik-LK – Abitur 2027

Pirmin Gohn

Nutzungshinweis: Dieses Skript darf nur im Rahmen des Unterrichts und der Abiturvorbereitung verwendet werden; insbesondere ist die eigenständige Weitergabe untersagt.

Skriptreihe PL · Physik-Leistungsfach zum Abitur 2027

PL1 Schwingungen | PL2 Wellen | PL3 Elektrizitätslehre | PL4 Wellenoptik | PL5 Quantenphysik | PL-Σ Abiturvorbereitung | PL-K Kompakt

Lernen mit minærva

Dieses Skript ist ein Teil von minærva. Alles gehört zusammen: Jedes Thema führt von der Erklärung zum Üben, zum Ausprobieren und ins große Bild.

minaerva.de

Skripte Verstehen
Der Stoff zum Nachlesen: Erklärungen, Herleitungen, Beispiele und typische Fehler.
minaerva.de

noctua Üben
Fragen und Aufgaben zu jedem Abschnitt, Formeltraining und Aufgaben im Stil des Abiturs, mit sofortiger Rückmeldung.
noctua.minaerva.de

fabrica Ausprobieren
Versuche und Anschauungen zum Selbermessen und Anfassen, ohne Konto, auch auf dem iPad.
fabrica.minaerva.de

tela Vernetzen
Das Wissensnetz: worauf ein Thema aufbaut und wohin es führt.
tela.minaerva.de

So greifen die Skripte ineinander

Erklärskripte	Physik PL1–PL5, das Lernskript PL-Σ und Mathe ML1–ML3 enthalten den Stoff, aber keine Aufgaben.
Aufgabenskripte	Je Fach eines mit den Übungsaufgaben. Die Erklärskripte verweisen darauf; jede Aufgaben-, Abbildungs- und Tabellennummer gibt es je Fach nur einmal.
Abi-ähnlich	Je Fach eine Sammlung mit Aufgaben, wie sie im Abitur vorkommen könnten.
Lösungsskripte	Zu den Aufgabenskripten und zu den Abi-ähnlichen Aufgaben, jeweils je Fach.
Kompakt	Formeln und Abbildungen zum schnellen Wiederholen: PL-K für Physik, ML-K für Mathe, dazu die Formelsammlung.

Am Ende vieler Abschnitte stehen Links zur passenden Übung, zum Versuch und ins Wissensnetz. In der PDF-Datei lassen sie sich direkt antippen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis 4
Was ist abiturrelevant? 5
1 Werkzeuge: Ableitung und Sinusfunktion 7
1.1 Bewegungen mit Ableitungen beschreiben Abi 7
1.2 Sinus und Kosinus mit Parametern Abi 7
2 Das Gravitationsfeld 9
2.1 Das Gravitationsgesetz Abi teilweise 9
2.2 Energie im Gravitationsfeld Abi teilweise 10
2.3 Im Inneren der Erde Zusatz · nicht Abi 10
3 Schwingungen beschreiben 11
3.1 Was ist eine Schwingung? Abi 11
3.2 Schwingungen aufzeichnen und einteilen Abi 11
3.3 Der Zeiger: Kreisbewegung und Schwingung Abi 11
3.4 Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung Abi 12
4 Harmonische Schwingung und lineares Kraftgesetz 14
4.1 Die lineare Rückstellkraft Abi 14
4.2 Die Differentialgleichung und ihre Lösung Abi 14
4.3 Das senkrechte Federpendel Abi 15
4.4 Federn kombinieren Abi 16
5 Weitere harmonische Schwinger 17
5.1 Das Fadenpendel Abi 17
5.2 Flüssigkeit im U-Rohr Abi 18
5.3 Fall durch die Erde Zusatz · nicht Abi 18
6 Energie der harmonischen Schwingung 19
6.1 Energieerhaltung beim Federpendel Abi 19
7 Dämpfung und Resonanz 21
7.1 Gedämpfte Schwingungen Abi 21
7.2 Exponentielle Dämpfung IQB-Pool 21
7.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz IQB-Pool 22
8 Überlagerung von Schwingungen 24
8.1 Verstärkung und Auslöschung Abi 24
8.2 Schwebung Abi teilweise 24
9 Ausblick: elektromagnetische Schwingungen 26
9.1 Dieselbe Gleichung im Stromkreis Abi 26
10 Das Wichtigste auf einen Blick 27

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit	Typischer Bereich / Hinweis
x, $x(t)$	Auslenkung (Elongation) aus der Gleichgewichtslage	m	Abitur, Formelsammlung: s
$\hat{x}$	Amplitude, größte Auslenkung	m	Formelsammlung: $s_{\max}$
v, a	Geschwindigkeit, Beschleunigung des Schwingers	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$v = \dot{x}$, $a = \dot{v} = \ddot{x}$
$\hat{v}$, $\hat{a}$	Maximalwerte von Geschwindigkeit und Beschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$\hat{v} = \hat{x}\omega$, $\hat{a} = \hat{x}\omega^2$
T	Periodendauer (Schwingungsdauer)	s	–
f	Frequenz	$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$	$f = \frac{1}{T}$
ω	Kreisfrequenz	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	$\omega = 2\pi f$
φ_0	Nullphasenwinkel (Phase zur Zeit $t = 0$)	rad	–
D	Richtgröße; bei einer Feder die Federkonstante (Federhärte)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$	Schulfedern: 1–100 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
m	Masse des Schwingers	kg	–
l	Pendellänge (Fadenpendel) bzw. Länge einer Flüssigkeitssäule	m	Formelsammlung: ℓ
g	Fallbeschleunigung, Gravitationsfeldstärke	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$	Mitteleuropa: 9,81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
G	Gravitationskonstante	$\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$	$6{,}674 \cdot 10^{-11}$ $\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$
M, R	Masse und Radius eines Himmelskörpers	kg, m	Erde: $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, 6371 km
r	Abstand vom Mittelpunkt eines Himmelskörpers	m	–
E	Energie (kinetisch, potentiell, Spannenergie)	J	–
δ	Abklingkoeffizient einer gedämpften Schwingung	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	–
f_0, f_E	Eigenfrequenz eines Schwingers, Frequenz des Erregers	Hz	–
f_S	Schwebungsfrequenz	Hz	$f_S = \lvert f_1 - f_2 \rvert$

Was ist abiturrelevant?

Dieses Skript geht an vielen Stellen über den Prüfungsstoff hinaus. Maßgeblich für das Abitur 2027 in Baden-Württemberg ist der **Bildungsplan 2016, Leistungsfach**, Abschnitt 3.6.3 (Schwingungen). Jede Abschnittsüberschrift trägt eine Marke – auch im Inhaltsverzeichnis, das so zugleich als Stoffübersicht dient:

Abi	**Prüfungsstoff.** Verstehen, erklären und rechnen können.
Abi teilweise	**Teilweise Prüfungsstoff.** Was genau dazugehört, steht in einem Hinweis direkt unter der Überschrift.
IQB-Pool	**Nicht im Bildungsplan, aber in den bundesweiten Bildungsstandards.** Kann über eine Aufgabe aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder im Abitur vorkommen (seit 2026 übernimmt Baden-Württemberg solche Aufgaben). Qualitativ erklären und mit den Formeln der Formelsammlung rechnen können.
Zusatz · nicht Abi	**Geht über Bildungsplan und Bildungsstandards hinaus.** Hilft beim Verstehen, wird im Abitur aber nicht vorausgesetzt.

Die graue Marke steht außerdem an Aufgaben im Aufgabenskript, die über den Prüfungsstoff hinausgehen. **Aufgaben ohne Marke gehören zum Prüfungsstoff.**

Die Skriptreihe zum Abitur 2027

Fünf Skripte decken zusammen den gesamten schriftlich prüfbaren Stoff des Leistungsfachs ab. Dieses Skript ist farbig hinterlegt. Für die letzten Wochen vor der Prüfung fasst das Lernskript PL-Σ **Abiturvorbereitung** alles in Kurzform zusammen (rechte Spalte: Kapitel dort); seine Formelübersicht gibt es auch als eigene Formelsammlung. Ganz zum Schluss: das Kompaktskript PL-K mit allen Formeln, Abbildungen und Merkpunkten der fünf Skripte auf wenigen Seiten, ohne Erklärungen.

Nr.	Skript	Bildungsplan 3.6 …	zusätzlich IQB-Pool	im Lernskript PL-Σ
PL1	Schwingungen	3.6.3 (1)–(5), (9); Gravitationsfeld als Grundlage für den Feldvergleich in 3.6.2	Resonanz bei erzwungenen Schwingungen	3; 5.5
PL2	Wellen	3.6.4 (1)–(7)	–	4
PL3	Elektrizitätslehre	3.6.2 (elektrisches und magnetisches Feld, Elektrodynamik), 3.6.3 (6)–(8) (Schwingkreis), 3.6.4 (8), (9) (Hertzscher Dipol, Spektrum)	Coulomb'sches Gesetz, Feld einer Punktladung	5–9
PL4	Wellenoptik	3.6.5; das Licht betreffende Teile von 3.6.4 (Huygens, Brechung, Polarisation)	Interferometer, Gesetz von Malus	10
PL5	Quantenphysik	3.6.6	Koinzidenzmethode, Weltbild, Spektren und Energieniveaus, Atommodell, Potentialtopf, Laser	11

Die Denk- und Arbeitsweisen (3.6.1) ziehen sich durch alle Skripte: Modelle von Licht und Materie in 4 und 5, Naturkonstanten wie G, ε_0, μ_0, e und h in 1, 3 und 5. Das vertiefende Themengebiet (3.6.7) wird 2027 nicht schriftlich geprüft.

Warum das Skript mit der Gravitation beginnt

Das Gravitationsfeld steht im Bildungsplan nicht als eigenes Thema, wird aber zweimal gebraucht: Die Pendel dieses Skripts schwingen im Schwerefeld der Erde, und in der Elektrizitätslehre (Skript PL3) sollen elektrisches Feld, Magnetfeld und Gravitationsfeld verglichen werden (3.6.2.1 (9), 3.6.2.2 (7)). Deshalb steht das Gravitationsfeld – wie im Unterricht – am Anfang. Der **elektromagnetische Schwingkreis** (3.6.3 (6)–(8)) folgt erst in Skript PL3, weil man dafür Kondensator und Spule kennen muss; dort steht auch der Vergleich mit dem Federpendel.

Was im Abitur gegeben ist

Im Abitur 2027 sind die **mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung des IQB** und der im Kurs eingeführte wissenschaftliche Taschenrechner erlaubt (Facherlass 2027, 26.1.3). Zu den Schwingungen stehen darin: $T = \frac{1}{f}$, $\omega = 2\pi f$, das lineare Kraftgesetz $F = -Dx$, die Bewegungsgleichungen $x(t) = s_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit $v(t)$ und $a(t)$, die Differentialgleichung $\ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$, die gedämpfte Schwingung $x(t) = s_{\max} e^{-\delta t} \cos(\omega_D t)$, die Periodendauern von Feder- und Fadenpendel sowie die Spannenergie $\frac{1}{2} D x^2$ und die kinetische Energie. Zur Gravitation stehen dort das Gravitationsgesetz, die potentielle Energie $-\frac{G m_1 m_2}{r}$ und die Feldstärke $g = \frac{F_G}{m}$.

Nicht darin stehen unter anderem: wie man die Differentialgleichung aus dem Kraftansatz **aufstellt** und mit einem Ansatz **löst**, die Kleinwinkelnäherung beim Fadenpendel, die Periodendauern weiterer Schwinger (Flüssigkeit im U-Rohr, schwimmender Körper), die Resonanz und die Schwebung. Die Formelsammlung schreibt $s_{\max}$ statt $\hat{x}$ und ℓ statt l.

Wie man den Bildungsplan liest

Begriffe in Klammern ohne Zusatz sind verbindlich, ebenso solche nach **„unter anderem“**; nach **„zum Beispiel“** sind sie nur ein mögliches Beispiel. In 3.6.3 (1) stehen „gedämpft und ungedämpft“ als Merkmale zum **Klassifizieren** – die gedämpfte Schwingung muss man also erkennen und beschreiben können. Die **Bildungsstandards der KMK**, auf denen die Aufgaben aus dem gemeinsamen Pool beruhen, verlangen auf erhöhtem Niveau zusätzlich die gedämpfte Schwingung genauer und die **Resonanz bei erzwungenen Schwingungen**. Beides ist mit **IQB-Pool** markiert.

Die verbindlichen Kompetenzen und wo sie stehen:

Bildungsplan	Die Schülerinnen und Schüler können …	Abschnitt
3.6.3 (1)	Schwingungen aufzeichnen, als periodische Bewegungen um eine Gleichgewichtslage beschreiben und klassifizieren ($x(t)$, $\hat{x}$, T, f, ω; harmonisch/nicht harmonisch; gedämpft/ungedämpft)	Kap. 3, 7.1
3.6.3 (2)	ungedämpfte harmonische Schwingungen mathematisch beschreiben ($x = \hat{x}\sin(\omega t)$, $x = \hat{x}\cos(\omega t)$, $v = \dot{x}$, $a = \dot{v} = \ddot{x}$)	1.2, 3.4
3.6.3 (3)	Zusammenhang zwischen harmonischer Schwingung und linearer Rückstellkraft beschreiben (unter anderem horizontales Federpendel)	4.1
3.6.3 (4)	die Schwingungsdifferentialgleichung des Federpendels durch einen Ansatz lösen	4.2, 4.3
3.6.3 (5)	die Schwingungsdifferentialgleichung des Fadenpendels durch einen Ansatz lösen	5.1
3.6.3 (6)–(8)	elektromagnetischer Schwingkreis, Energieumwandlungen, Vergleich mit mechanischen Schwingungen	Skript PL3; Ausblick in Kap. 9
3.6.3 (9)	Überlagerung unabhängiger Schwingungen qualitativ beschreiben (zum Beispiel Verstärkung, Auslöschung, Schwebung)	Kap. 8
3.6.2.1 (9)	Gravitationsfeld als Vergleichsfeld (homogene Felder, Feld einer Masse)	Kap. 2

Zusätzlich aus den Bildungsstandards (erhöhtes Niveau): gedämpfte Schwingungen (7.2), Vergleich mechanischer und elektromagnetischer Schwingungen unter energetischen Aspekten (Skript PL3) und Resonanz bei erzwungenen Schwingungen (7.3).

1 Werkzeuge: Ableitung und Sinusfunktion

1.1 Bewegungen mit Ableitungen beschreiben Abi

Aus der Mittelstufe kennt man $v = \frac{\Delta x}{\Delta} t$ und $a = \frac{\Delta v}{\Delta} t$. Das sind **mittlere** Geschwindigkeiten und Beschleunigungen über ein Zeitintervall. Bei Schwingungen ändern sich v und a ständig; man braucht die **momentanen** Werte. Dafür lässt man Δt gegen null gehen – aus dem Differenzenquotienten wird die Ableitung.

Merksatz

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Orts, die Beschleunigung die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Ein Punkt über einer Größe steht in der Physik für die Ableitung **nach der Zeit**. Im x-t-Diagramm ist v die Steigung, im v-t-Diagramm ist a die Steigung. Umgekehrt ist die Fläche unter der v-t-Kurve der zurückgelegte Weg und die Fläche unter der a-t-Kurve die Geschwindigkeitsänderung.

Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz $F = m \cdot a$ wird daraus eine Aussage über Kräfte: Kennt man die Kraft auf einen Körper als Funktion seines Orts, $F(x)$, dann gilt

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(x(t)).$$

Diese Gleichung enthält die gesuchte Funktion $x(t)$ **und** ihre zweite Ableitung. Eine solche Gleichung heißt **Differentialgleichung**; sie ist das zentrale Werkzeug dieses Skripts.

Ausprobieren: **Schwingungsgleichung und Zeiger** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Differentialrechnung** ↗ · **Gewöhnliche Differentialgleichungen** ↗

1.2 Sinus und Kosinus mit Parametern Abi

Schwingungen werden durch Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben. Dabei rechnet man im **Bogenmaß** – der Taschenrechner muss auf RAD stehen.

Merksatz

Für die Funktion $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_0)$ gilt:

- $\hat{x}$ ist die **Amplitude** (Streckung in x-Richtung),
- ω ist die **Kreisfrequenz**; nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ wiederholt sich der Verlauf,
- φ_0 ist der **Nullphasenwinkel**; er verschiebt die Kurve in t-Richtung.

Ableiten mit der Kettenregel (innere Ableitung ω):

$$(\sin(\omega t))' = \omega \cos(\omega t), \quad (\cos(\omega t))' = -\omega \sin(\omega t)$$

Die Kosinusfunktion ist eine um eine Viertelperiode verschobene Sinusfunktion, $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Welche der beiden man benutzt, hängt nur vom Startzeitpunkt ab: Wird ein Pendel aus der Ruhelage angestoßen, beginnt $x(t)$ bei null – Sinus. Wird es ausgelenkt und losgelassen, beginnt $x(t)$ beim Maximum – Kosinus.

Beispiel 1

Gegeben ist $x(t) = 3{,}0\ \mathrm{cm} \cdot \sin(4{,}0\ \mathrm{s^{-1}} \cdot t)$. Dann ist $\hat{x} = 3{,}0$ cm, $\omega = 4{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}57$ s und $f = \frac{1}{T} = 0{,}64$ Hz. Die Ableitungen sind

$$v(t) = 12\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(4{,}0\ \mathrm{s^{-1}} \cdot t), \quad a(t) = -48\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s^2}} \cdot \sin(4{,}0\ \mathrm{s^{-1}} \cdot t).$$

Zur Vertiefung: **Aufgabe 1** (Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 2** (Parameter der Sinusfunktion, im Aufgabenskript).

Typischer Fehler

Falsch: Den Taschenrechner im Gradmaß (DEG) lassen: $\sin(5{,}0\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}20\ \mathrm{s})$ wird dann als $\sin(1°) \approx 0{,}017$ berechnet.

Richtig: Auf Bogenmaß (RAD) umstellen: $\sin(1) \approx 0{,}84$.

Das Argument $\omega t + \varphi_0$ ist ein Winkel im Bogenmaß; ω hat die Einheit s^{-1}, nicht Grad pro Sekunde. Vor jeder Schwingungsrechnung den Modus prüfen.

Ausprobieren: **Schwingungsgleichung und Zeiger ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Trigonometrie & Bogenmaß ↗** · **Gewöhnliche Differentialgleichungen ↗**

2 Das Gravitationsfeld

2.1 Das Gravitationsgesetz Abi teilweise

> **Abi:** das Gravitationsfeld als Feld einer Masse und als homogenes Feld nahe der Erdoberfläche beschreiben und mit dem elektrischen Feld vergleichen (3.6.2.1 (9), Skript PL3). Das Gravitationsgesetz steht in der Formelsammlung. **Zusatz:** Rechnungen mit der potentiellen Energie im radialen Feld und das Feld im Erdinneren.

Zwei Körper ziehen sich allein wegen ihrer Masse an. Isaac Newton erkannte 1687, dass dieselbe Kraft einen Apfel fallen lässt und den Mond auf seiner Bahn hält.

Merksatz

Gravitationsgesetz: Zwei kugelsymmetrische Körper der Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte den Abstand r haben, ziehen sich mit der Kraft

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

an. $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ ist die **Gravitationskonstante**. Die Kraft wirkt auf beide Körper gleich stark, aber entgegengesetzt (drittes Newtonsches Gesetz).

Wie beim elektrischen Feld (Skript PL3) beschreibt man die Wirkung eines Körpers auf seine Umgebung durch ein **Feld**: Jeder Ort im Raum bekommt einen Vektor, der angibt, welche Kraft dort auf einen Probekörper der Masse m wirken würde, geteilt durch m.

Definition

Die **Gravitationsfeldstärke** ist $\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$, ihre Einheit $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$. Im Feld eines Himmelskörpers der Masse M ist sie im Abstand r vom Mittelpunkt

$$g(r) = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Die Feldlinien zeigen radial zum Mittelpunkt hin – das Feld ist ein **Radialfeld**. In einem kleinen Bereich nahe der Oberfläche sind die Feldlinien praktisch parallel und gleich dicht: Dort ist das Feld **homogen** mit $g \approx 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.

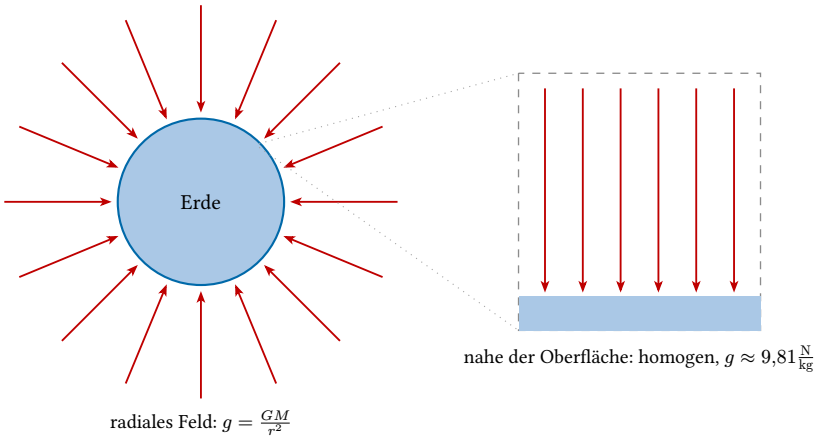


Abbildung 1: Gravitationsfeld der Erde. Weit weg zeigen die Feldlinien radial zum Mittelpunkt und werden nach außen dünner ($g \sim \frac{1}{r^2}$). In einem Ausschnitt von einigen hundert Metern sind sie praktisch parallel: Das Feld ist dort homogen.

Die Fallbeschleunigung g ist also nichts anderes als die Gravitationsfeldstärke. Dass alle Körper gleich schnell fallen, folgt sofort: Die Kraft wächst mit m, die träge Masse im Newtonschen Gesetz auch – m kürzt sich heraus.

Beispiel 2

Aus $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und dem Erdradius $R = 6371$ km folgt die Erdmasse:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (6{,}371 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg}^2}} \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Henry Cavendish bestimmte 1798 die Konstante G mit einer Drehwaage im Labor – man sagt, er habe „die Erde gewogen".

Ausprobieren: **Gravitationsfeld** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Gravitation & Keplergesetze** ↗

2.2 Energie im Gravitationsfeld

Abi teilweise

Abi: Im homogenen Feld gilt $\Delta E = mg\Delta h$; diese Energie wird bei Pendeln dauernd umgewandelt. **Zusatz:** die Formel für das radiale Feld.

Hebt man einen Körper im homogenen Feld um h an, verrichtet man die Arbeit $W = F \cdot x = mgh$. Im radialen Feld ist die Kraft nicht konstant; man muss die Arbeit über kleine Wegstücke aufsummieren – also integrieren:

Merksatz

Zusatz · nicht Abi

Bringt man einen Körper der Masse m im Feld der Masse M vom Abstand r_1 auf den Abstand $r_2 > r_1$, so steigt seine potentielle Energie um

$$\Delta E = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Legt man den Nullpunkt ins Unendliche, wird daraus die Formel der Formelsammlung $E_{\mathrm{pot}}(r) = -\frac{GmM}{r}$. Für $r_2 = r_1 + h$ mit $h \ll r_1$ ergibt sich wieder $\Delta E \approx mgh$.

Ausprobieren: **Gravitationsfeld** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Gravitation & Keplergesetze** ↗

2.3 Im Inneren der Erde

Zusatz · nicht Abi

Was passiert, wenn man in einen Schacht zum Erdmittelpunkt steigt? Nimmt man eine gleichmäßige Dichte an, zieht nur die Kugel **unterhalb** des Körpers an ihm; die Kugelschale darüber zieht nach allen Seiten gleich stark und hebt sich auf. Die innere Kugel hat den Radius r und die Masse $\frac{M \cdot r^3}{R^3}$. Damit wird

$$F(r) = G \cdot \frac{\frac{mMr^3}{R^3}}{r^2} = \frac{GmM}{R^3} \cdot r = \frac{mg}{R} \cdot r.$$

Im Erdinneren wächst die Kraft also **linear** mit dem Abstand vom Mittelpunkt. Genau dieses Kraftgesetz führt – wie wir gleich sehen – zu einer harmonischen Schwingung: Ein Körper, der durch einen (gedachten) Tunnel quer durch die Erde fällt, pendelt hin und her (**Aufgabe 16** (Fall durch die Erde, im Aufgabenskript)).

Zur Vertiefung: **Aufgabe 3** (Fallbeschleunigung auf dem Mond, im Aufgabenskript), **Aufgabe 4** (Schwerelos in 300 km Höhe?, im Aufgabenskript), **Aufgabe 5** (Erdradius aus g, im Aufgabenskript), **Aufgabe 6** (Doppelte Masse, gleiche Dichte, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 7** (Vulkan auf Io, im Aufgabenskript).



3 Schwingungen beschreiben

3.1 Was ist eine Schwingung? Abi

Ein Körper an einer Feder, eine Schaukel, die Zinke einer Stimmgabel, ein Boot auf den Wellen: Alle bewegen sich immer wieder um eine Ruhelage hin und her. Eine solche Bewegung heißt **mechanische Schwingung**. Damit sie zustande kommt, braucht es zweierlei: eine **rücktreibende Kraft**, die den Körper zur Ruhelage zurückzieht, und **Trägheit**, wegen der er über die Ruhelage hinausschießt.

Definition

Eine **Schwingung** ist eine zeitlich periodische Bewegung um eine **Gleichgewichtslage** (Ruhelage). Sie wird beschrieben durch

- die **Auslenkung** oder **Elongation** $x(t)$: der momentane Abstand von der Gleichgewichtslage, mit Vorzeichen,
- die **Amplitude** $\hat{x}$: die größte Auslenkung,
- die **Periodendauer** T: die Zeit für eine vollständige Hin- und Herbewegung,
- die **Frequenz** $f = \frac{1}{T}$: die Zahl der Schwingungen pro Sekunde, Einheit Hertz ($1\ \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$),
- die **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Die Punkte, an denen der Körper umkehrt, heißen **Umkehrpunkte**. Dort ist er kurz in Ruhe, die Auslenkung ist maximal. In der Gleichgewichtslage ist er am schnellsten.

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗

3.2 Schwingungen aufzeichnen und einteilen Abi

Schwingungen sind meist zu schnell, um sie mit bloßem Auge zu verfolgen. Man zeichnet deshalb ihr t-x-Diagramm auf – früher mit einem Schreibstift am Pendel, der auf einem gleichmäßig weggezogenen Papierstreifen schreibt, oder mit einem Sandpendel. Heute benutzt man einen **Ultraschall-Abstandssensor**, einen **Kraftsensor** an der Aufhängung oder den Beschleunigungssensor eines Smartphones, das selbst mitschwingt (App phyphox). Der Rechner zeichnet dann $x(t)$, $v(t)$ oder $a(t)$ direkt.

Einteilung von Schwingungen

- **Harmonisch** heißt eine Schwingung, deren t-x-Diagramm eine Sinuskurve ist. Bei **nicht harmonischen** Schwingungen ist die Bewegung zwar periodisch, aber anders geformt – etwa ein Ball, der zwischen Boden und Decke hin- und herspringt (Zickzack-Linie), oder ein Pendel, das an eine Wand stößt.
- **Ungedämpft** heißt eine Schwingung, deren Amplitude gleich bleibt. Bei einer **gedämpften** Schwingung nimmt die Amplitude ab, weil Energie durch Reibung verloren geht (Abschnitt 7.1).
- **Frei** schwingt ein System, das einmal angestoßen und dann sich selbst überlassen wird. Bei einer **erzwungenen** Schwingung wird es von außen periodisch angetrieben (Abschnitt 7.3).

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗

3.3 Der Zeiger: Kreisbewegung und Schwingung Abi

Eine harmonische Schwingung hängt eng mit der gleichförmigen Kreisbewegung zusammen. Beleuchtet man eine Kugel auf einem Drehteller von der Seite, bewegt sich ihr Schatten an der Wand genau wie ein Federpendel gleicher Periodendauer hin und her. Daraus entsteht eine nützliche Darstellung:

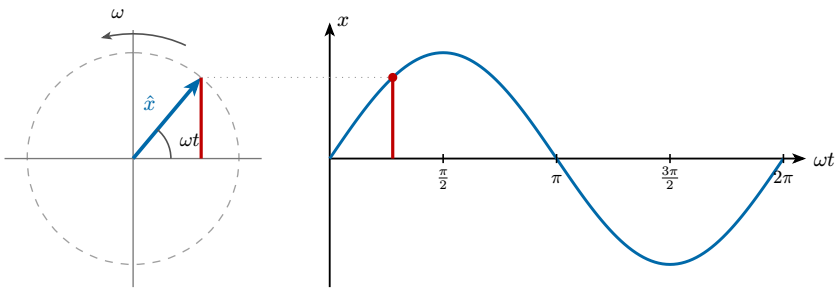


Abbildung 2: Zeigerdarstellung: Ein Zeiger der Länge $\hat{x}$ dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Seine senkrechte Komponente (rot) ist die Auslenkung $x(t) = \hat{x}\sin(\omega t)$. Nach einer Umdrehung, also nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, wiederholt sich alles. Daher der Name **Kreisfrequenz** für ω.

Der Winkel $\omega t + \varphi_0$, den der Zeiger gerade einnimmt, heißt **Phase** der Schwingung. Zwei Schwingungen gleicher Frequenz, deren Zeiger um einen festen Winkel $\Delta\varphi$ gegeneinander verdreht sind, haben die **Phasendifferenz** $\Delta\varphi$. Zeigen beide Zeiger in dieselbe Richtung ($\Delta\varphi = 0$), schwingen sie **gleichphasig**; zeigen sie entgegengesetzt ($\Delta\varphi = \pi$), schwingen sie **gegenphasig**. Die Zeigerdarstellung wird bei den Wellen (Skript PL2) und in der Wellenoptik (Skript PL4) wieder gebraucht.

Ausprobieren: **Schwingungsgleichung und Zeiger ↗** Üben: **noctua ↗** Einordnen: **Kreisbewegung & Zentripetalkraft ↗** · **Gewöhnliche Differentialgleichungen ↗**

3.4 Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung Abi

Abi: Die Abituraufgaben und die IQB-Formelsammlung nennen die Auslenkung s, die Amplitude $\hat{s}$ bzw. $s_{\max}$. Dieses Skript schreibt x und $\hat{x}$, wie in der Mathematik und international üblich. Gemeint ist dasselbe.

Ein Körper wird um $\hat{x}$ ausgelenkt und zur Zeit $t = 0$ losgelassen. Er schwingt dann nach $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$. Zweimal ableiten liefert Geschwindigkeit und Beschleunigung:

Merksatz

$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\hat{x}\omega\sin(\omega t), \quad \hat{v} = \hat{x}\omega$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t), \quad \hat{a} = \hat{x}\omega^2$$

Bei jeder harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung und ihr entgegengesetzt: $a = -\omega^2 x$.

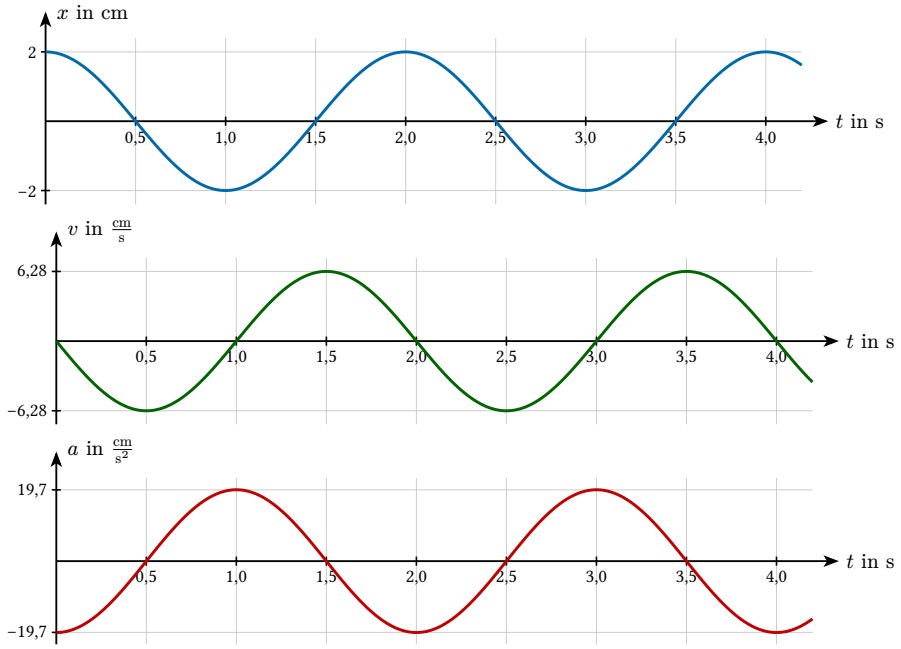


Abbildung 3: Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Federpendels mit $\hat{x} = 2{,}0$ cm und $T = 2{,}0$ s, das zur Zeit 0 ausgelenkt losgelassen wird. In den Umkehrpunkten ist $v = 0$ und $|a|$ maximal, beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ist $|v|$ maximal und $a = 0$. Die v-Kurve ist gegenüber der x-Kurve um eine Viertelperiode verschoben, die a-Kurve um eine halbe.

Beispiel 3

Für das Pendel der Abbildung ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \mathrm{s}^{-1} \approx 3{,}14\ \mathrm{s}^{-1}$. Die größte Geschwindigkeit ist $\hat{v} = \hat{x}\omega = 2{,}0\ \mathrm{cm} \cdot 3{,}14\ \mathrm{s}^{-1} = 6{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, die größte Beschleunigung $\hat{a} = \hat{x}\omega^2 = 2{,}0\ \mathrm{cm} \cdot 9{,}87\ \mathrm{s}^{-2} = 20\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$. Zur Zeit $t = 0{,}25$ s ist das Pendel bei $x = 2{,}0\ \mathrm{cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}4$ cm und bewegt sich mit $v = -6{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4{,}4\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ auf die Gleichgewichtslage zu.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 8** (Ein Schwingungsdiagramm lesen, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 9** (Schnelle Fragen zu Pendeln, im Aufgabenskript).

Typischer Fehler

Falsch: „Im Umkehrpunkt ist alles null: Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung."

Richtig: Im Umkehrpunkt ist $v = 0$, aber $|x| = \hat{x}$ und $|a| = \omega^2\hat{x}$ sind maximal. In der Gleichgewichtslage ist es umgekehrt: $x = 0$ und $a = 0$, dafür $|v| = \hat{v}$.

Die Beschleunigung folgt mit $a = -\omega^2 x$ der Auslenkung, nicht der Geschwindigkeit. Der Körper kehrt um, **weil** dort die Rückstellkraft am größten ist.

Ausprobieren: **Schwingungsgleichung und Zeiger** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Kinematik (s, v, a)** ↗ · **Gewöhnliche Differentialgleichungen** ↗



4 Harmonische Schwingung und lineares Kraftgesetz

4.1 Die lineare Rückstellkraft Abi

Warum schwingt ein Federpendel gerade sinusförmig? Die Antwort liegt im Kraftgesetz. Eine Schraubenfeder gehorcht in guter Näherung dem **Hookeschen Gesetz**: Die Kraft ist proportional zur Dehnung.

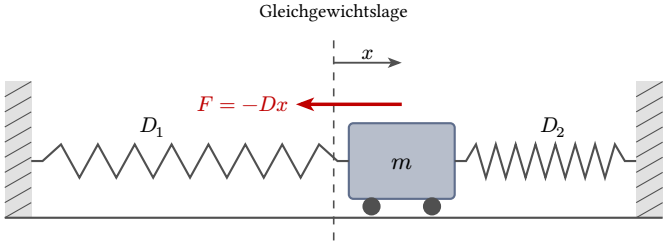


Abbildung 4: Horizontales Federpendel: Ein Wagen der Masse m ist zwischen zwei Federn eingespannt, die auf Zug und Druck belastbar sind. Wird er um x aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, ziehen bzw. drücken beide Federn ihn zurück. Die rücktreibende Kraft ist zur Auslenkung proportional und ihr entgegengerichtet. Die Richtgröße ist hier $D = D_1 + D_2$ (**Aufgabe 12** (Federn kombinieren, im Aufgabenskript)).

Merksatz

Lineares Kraftgesetz: Ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung,

$$F = -D \cdot x \ ,$$

so schwingt der Körper **harmonisch**. Die Konstante D heißt **Richtgröße**; bei einer Feder ist sie die Federkonstante. Das Minuszeichen sagt: Die Kraft zeigt immer zur Gleichgewichtslage. Umgekehrt gilt: Jede harmonische Schwingung verlangt eine lineare Rückstellkraft, denn aus $a = -\omega^2 x$ folgt $F = ma = -m\omega^2 x$.

Ob ein Schwinger harmonisch schwingt, lässt sich also auf zwei Wegen prüfen: am Diagramm (Sinusform) oder am Kraftgesetz (Kraft proportional zur Auslenkung). Beim Ball, der zwischen zwei Wänden hin- und herspringt, ist die Kraft fast überall null und nur beim Stoß riesig – keine lineare Rückstellkraft, keine harmonische Schwingung.

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗

4.2 Die Differentialgleichung und ihre Lösung Abi

Für den Wagen gilt nach Newton $m \cdot a = F$. Mit $a = \ddot{x}$ und $F = -Dx$:

Merksatz

Schwingungsdifferentialgleichung des Federpendels:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

Gesucht ist eine Funktion, deren zweite Ableitung bis auf einen negativen Faktor wieder die Funktion selbst ist. Das leisten Sinus und Kosinus.

Man löst die Gleichung mit einem **Ansatz**: Man vermutet die Form der Lösung, setzt sie ein und bestimmt die unbekannten Parameter so, dass die Gleichung erfüllt ist.

Beispiel 4

Ansatz: $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$ mit noch unbekanntem ω.

Ableiten: $\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega\sin(\omega t), \quad \ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t)$.

Einsetzen: $-\omega^2 \cdot x(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$. Das gilt für alle Zeiten genau dann, wenn

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Die Amplitude $\hat{x}$ kürzt sich heraus – sie ist frei wählbar und wird durch die Anfangsbedingung festgelegt (wie weit man auslenkt). Ebenso funktionieren die Ansätze $x(t) = \hat{x}\sin(\omega t)$ und $x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Merksatz

Periodendauer des Federpendels:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Periodendauer hängt **nur** von Masse und Richtgröße ab, **nicht** von der Amplitude. Eine schwerere Masse schwingt langsamer, eine härtere Feder schneller.

Dass T nicht von der Amplitude abhängt, ist eine besondere Eigenschaft harmonischer Schwingungen (**Isochronie**). Deshalb eignen sich Federn und Pendel als Taktgeber für Uhren: Auch wenn die Amplitude langsam abnimmt, bleibt der Takt gleich.

Beispiel 5

Ein Wagen der Masse $m = 300$ g hängt zwischen zwei Federn mit $D_1 = 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ und $D_2 = 20\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ (Abbildung oben). Er wird um 20 cm nach links ausgelenkt und losgelassen. Mit $D = 30\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{30\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0{,}300\ \mathrm{kg}}} = 10\ \mathrm{s}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}63\ \mathrm{s}\ .$$

Den Durchgang durch die Gleichgewichtslage erreicht er nach $\frac{T}{4} = 0{,}16$ s mit der Geschwindigkeit $\hat{v} = \hat{x}\omega = 0{,}20\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{s}^{-1} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ · **Schwingungsgleichung und Zeiger** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Gewöhnliche Differentialgleichungen** ↗ · **Harmonischer Oszillator** ↗

4.3 Das senkrechte Federpendel Abi

Hängt man den Körper an eine senkrechte Feder, wirkt zusätzlich die Gewichtskraft. Sie verschiebt aber nur die Gleichgewichtslage:

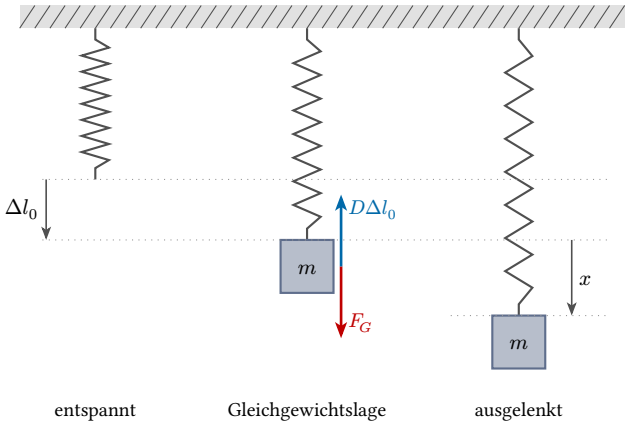


Abbildung 5: Senkrechtes Federpendel. In der Gleichgewichtslage ist die Feder schon um Δl_0 gedehnt, die Federkraft $D\Delta l_0$ hält der Gewichtskraft $F_G = mg$ das Gleichgewicht. Zählt man die Auslenkung x ab dieser Lage, bleibt als resultierende Kraft genau $-Dx$.

Wird der Körper um x unter die Gleichgewichtslage gezogen, ist die Feder um $\Delta l_0 + x$ gedehnt. Die resultierende Kraft (nach unten positiv) ist

$$F = mg - D(\Delta l_0 + x) = \underbrace{mg - D\Delta l_0}_{=0} - Dx = -Dx.$$

Es gilt dasselbe lineare Kraftgesetz wie beim waagrechten Pendel, also auch dieselbe Differentialgleichung und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$. Die Schwerkraft ändert die Periodendauer nicht. Daraus folgt ein praktischer Trick: Aus der statischen Dehnung $\Delta l_0 = \frac{mg}{D}$ ergibt sich $\frac{m}{D} = \frac{\Delta l_0}{g}$, also $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_0}{g}}$.

Typischer Fehler

Falsch: Beim senkrechten Federpendel die Auslenkung ab der entspannten Feder messen und die Gewichtskraft zur Rückstellkraft dazurechnen.

Richtig: Ab der Gleichgewichtslage messen. Dort heben sich Gewichtskraft und Federkraft auf, die Rückstellkraft ist wieder $F = -Dx$, und es gilt dieselbe Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ wie beim waagrechten Pendel.

Die Gewichtskraft verschiebt nur die Ruhelage, und zwar um $\frac{mg}{D}$ nach unten.

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗

4.4 Federn kombinieren Abi

Oft wirken mehrere Federn auf einen Körper. Die Gesamtrichtgröße hängt davon ab, wie sie angeordnet sind:

Anordnung	Überlegung	Richtgröße
Wagen zwischen zwei Federn	Bei Auslenkung um x wird die eine Feder um x gedehnt, die andere um x gestaucht. Beide Kräfte zeigen zur Ruhelage und addieren sich.	$D = D_1 + D_2$
Zwei Federn nebeneinander (parallel)	Beide werden um dieselbe Strecke gedehnt, die Kräfte addieren sich.	$D = D_1 + D_2$
Zwei Federn hintereinander (in Reihe)	Beide tragen dieselbe Kraft F, die Dehnungen addieren sich: $x = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$.	$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$

Typischer Fehler

Falsch: Zwei Federn hintereinander gehängt: $D = D_1 + D_2$.

Richtig: Hintereinander (in Reihe) gilt $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$; die Kombination ist **weicher** als jede einzelne Feder. $D = D_1 + D_2$ gilt nebeneinander (parallel) und für einen Wagen zwischen zwei Federn.

Kontrolle mit zwei gleichen Federn in Reihe: Bei gleicher Kraft dehnt sich jede um dieselbe Strecke, zusammen also doppelt so weit. Die Richtgröße ist nur halb so groß.

Ausprobieren: **Federn kombinieren** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗



5 Weitere harmonische Schwinger

5.1 Das Fadenpendel Abi

Ein **Fadenpendel** besteht aus einem kleinen, schweren Körper an einem leichten Faden der Länge l. Wird es um den Winkel φ ausgelenkt, zerlegt man die Gewichtskraft in eine Komponente längs des Fadens – sie wird von der Fadenkraft aufgehoben – und eine Komponente tangential zur Bahn. Diese treibt den Körper zurück:

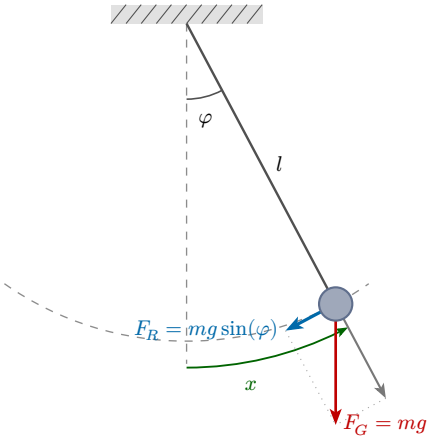


Abbildung 6: Kräfte am Fadenpendel. Die rücktreibende Kraft ist die Tangentialkomponente der Gewichtskraft, $F_R = mg\sin(\varphi)$. Die Auslenkung x wird längs der Kreisbahn gemessen (grün): $x = l \cdot \varphi$ mit φ im Bogenmaß.

Für die Kraft in Bahnrichtung gilt $F = -mg\sin(\varphi)$ mit $\varphi = \frac{x}{l}$. Das ist **kein** lineares Kraftgesetz – der Sinus stört. Für kleine Winkel ist aber $\sin(\varphi) \approx \varphi$:

φ **in Grad**	5°	10°	20°	30°	45°
φ im Bogenmaß	0,0873	0,1745	0,3491	0,5236	0,7854
$\sin(\varphi)$	0,0872	0,1736	0,3420	0,5000	0,7071
Abweichung	0,1%	0,5%	2,1%	4,7%	11%

Merksatz

Kleinwinkelnäherung ($\varphi \lesssim 10°$): $\sin(\varphi) \approx \varphi = \frac{x}{l}$. Dann ist

$$F \approx -\frac{mg}{l} \cdot x \ ,$$

also ein lineares Kraftgesetz mit der Richtgröße $D = \frac{mg}{l}$. Die Differentialgleichung lautet

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{mg}{l} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l} \cdot x.$$

Der Ansatz $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$ liefert $\omega^2 = \frac{g}{l}$ und damit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Periodendauer hängt nur von der Fadenlänge und der Fallbeschleunigung ab, **nicht** von der Masse und (für kleine Winkel) nicht von der Amplitude.

Dass die Masse herausfällt, hat denselben Grund wie beim freien Fall: Die rücktreibende Kraft ist proportional zu m, die Trägheit ebenfalls. Das Fadenpendel ist deshalb ein bequemes Messgerät für g: Man misst Länge und Periodendauer und rechnet $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Große Auslenkungen Zusatz · nicht Abi

Bei großen Winkeln ist die rücktreibende Kraft kleiner als $mg\varphi$ – das Pendel schwingt langsamer. Die Schwingung ist dann nicht mehr harmonisch, und T hängt von der Amplitude ab. Genähert gilt $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$ mit der Winkelamplitude φ_0 im Bogenmaß: Bei 10° ist T um 0,2% größer, bei 30° um 1,7%. Bei 90° versagt die Näherung; exakt gerechnet sind es rund 18%.

Typischer Fehler

Falsch: „Ein schwererer Pendelkörper schwingt langsamer."

Richtig: Für kleine Auslenkungen gilt $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$; die Masse kommt nicht vor.

Eine größere Masse braucht mehr Kraft für dieselbe Beschleunigung, erfährt aber auch eine entsprechend größere rücktreibende Komponente der Gewichtskraft. Beides kürzt sich. Die Länge ℓ wird bis zum **Schwerpunkt** des Pendelkörpers gemessen.

Ausprobieren: **Fadenpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗

5.2 Flüssigkeit im U-Rohr Abi

Ein U-förmiges Rohr mit der Querschnittsfläche A ist mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt; die Flüssigkeitssäule hat insgesamt die Länge l. Drückt man die Flüssigkeit auf einer Seite um x nach unten, steht sie auf der anderen um x höher. Der Höhenunterschied $2x$ erzeugt die rücktreibende Kraft – das Gewicht der überstehenden Säule:

$$F = -\rho \cdot A \cdot 2x \cdot g = -\underbrace{2\rho A g}_{=D} \cdot x.$$

Bewegt wird die ganze Säule mit der Masse $m = \rho A l$. Damit ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho A l}{2\rho A g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Weder Dichte noch Querschnitt spielen eine Rolle. Ganz ähnlich schwingt ein **schwimmender Körper** (Boje, Holzklotz), den man etwas tiefer ins Wasser drückt: Die zusätzliche Auftriebskraft ist $F = -\rho_W A g x$, also $D = \rho_W A g$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_W A g}}$ (**Aufgabe 14** (Schwimmender Holzklotz, im Aufgabenskript)).

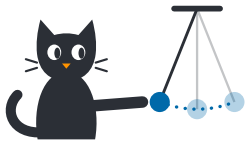
Ausprobieren: **Flüssigkeit im U-Rohr** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗ · **Hydrostatik, Druck & Auftrieb** ↗

5.3 Fall durch die Erde Zusatz · nicht Abi

Im Erdinneren gilt nach Abschnitt 2.3 $F = -\left(\frac{mg}{R}\right) \cdot r$ – ein lineares Kraftgesetz mit $D = \frac{mg}{R}$. Ein Körper, der in einen geraden Tunnel durch den Erdmittelpunkt fällt, schwingt also harmonisch mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}371 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \approx 5{,}06 \cdot 10^3\ \mathrm{s} \approx 84\ \mathrm{min}\ .$$

Nach 42 Minuten käme er auf der anderen Seite der Erde an. Bemerkenswert: Genauso lange braucht ein Satellit für eine Erdumrundung dicht über der Oberfläche – der Schatten eines solchen Satelliten auf der Erdachse führt gerade diese Schwingung aus.



6 Energie der harmonischen Schwingung

6.1 Energieerhaltung beim Federpendel Abi

Beim waagrechten Federpendel wird ständig Spannenergie der Feder in kinetische Energie des Körpers umgewandelt und zurück. Ohne Reibung bleibt die Summe gleich:

Merksatz

$$E_{\text{ges}} = \underbrace{\frac{1}{2}Dx^2}_{\text{Spannenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetische Energie}} = \frac{1}{2}D\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 = \text{konstant}$$

In den Umkehrpunkten steckt die ganze Energie in der Feder, beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ist sie vollständig kinetisch. Die Gesamtenergie wächst mit dem **Quadrat** der Amplitude: Doppelte Amplitude, vierfache Energie.

Setzt man $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$ ein, wird $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D\hat{x}^2\cos^2(\omega t)$ und $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\hat{x}^2\omega^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}D\hat{x}^2\sin^2(\omega t)$ (wegen $m\omega^2 = D$). Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ist die Summe konstant. Beide Energien pendeln mit der **doppelten** Frequenz der Schwingung hin und her:

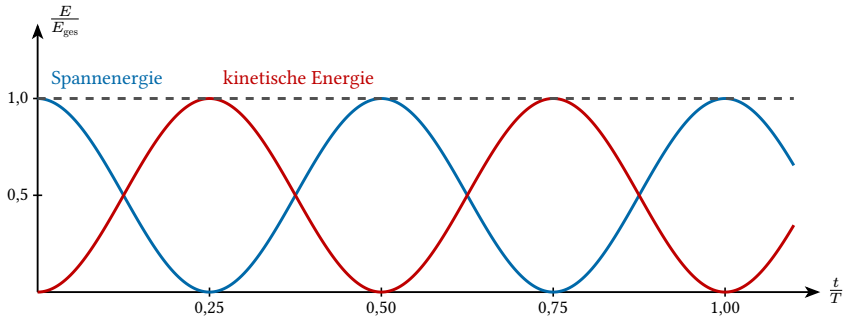


Abbildung 7: Energieumwandlung beim Federpendel, das zur Zeit 0 im Umkehrpunkt losgelassen wird. Die gestrichelte Linie ist die konstante Gesamtenergie.

Beim **Fadenpendel** wechseln sich Lageenergie mgh und kinetische Energie ab; die Höhe h über dem tiefsten Punkt ist $h = l(1 - \cos(\varphi))$. Beim **senkrechten Federpendel** sind es drei Energieformen (Spannenergie, Lageenergie, kinetische Energie). Rechnet man die Auslenkung ab der Gleichgewichtslage, verhalten sich Spann- und Lageenergie zusammen wieder wie $\frac{1}{2}Dx^2$.

Beispiel 6

Der Wagen aus Abschnitt 4.2 ($D = 30\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\hat{x} = 0{,}20\ \text{m}$, $m = 0{,}300\ \text{kg}$) hat die Energie $E = \frac{1}{2} \cdot 30\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}20\ \text{m})^2 = 0{,}60$ J. Daraus folgt unabhängig von der Differentialgleichung $\hat{v} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}60\ \text{J}}{0{,}300\ \text{kg}}} = 2{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 10** (Wagen zwischen zwei Federn, im Aufgabenskript), **Aufgabe 127** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 128** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 129** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 130** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 131** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 132** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 11** (Feder, Energie und Amplitude, im Aufgabenskript), **Aufgabe 12** (Federn kombinieren, im Aufgabenskript), **Aufgabe 142** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 137** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 13** (g aus zwei Fadenlängen, im Aufgabenskript), **Aufgabe 14** (Schwimmender Holzklotz, im Aufgabenskript), **Aufgabe 138** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 139** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 15** (Wasser im U-Rohr, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 16** (Fall durch die Erde, im Aufgabenskript).

Typischer Fehler

Falsch: „Doppelte Amplitude heißt doppelte Energie, und das Pendel schwingt langsamer, weil sein Weg länger ist."

Richtig: Wegen $E = \frac{1}{2}D\hat{x}^2$ vervierfacht sich die Energie. Die Periodendauer bleibt gleich; die Höchstgeschwindigkeit $\hat{v} = \omega\hat{x}$ verdoppelt sich.

Die Periodendauer einer harmonischen Schwingung hängt nicht von der Amplitude ab: Den längeren Weg legt der Körper mit größerer Geschwindigkeit zurück.

Ausprobieren: **Energie beim Federpendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Energie, Arbeit, Impuls & Erhaltungssätze** ↗ · **Harmonischer Oszillator** ↗



7 Dämpfung und Resonanz

7.1 Gedämpfte Schwingungen Abi

Ein reales Pendel kommt irgendwann zur Ruhe. Durch Reibung – Luftwiderstand, Reibung in der Aufhängung oder am Boden, innere Reibung in der Feder – wird bei jeder Schwingung ein Teil der mechanischen Energie in innere Energie (Wärme) umgewandelt. Die Amplitude nimmt ab, die Schwingung ist **gedämpft**. Die Periodendauer bleibt bei schwacher Dämpfung praktisch gleich.

Wie schnell die Amplitude abnimmt, hängt von der Art der Reibung ab:

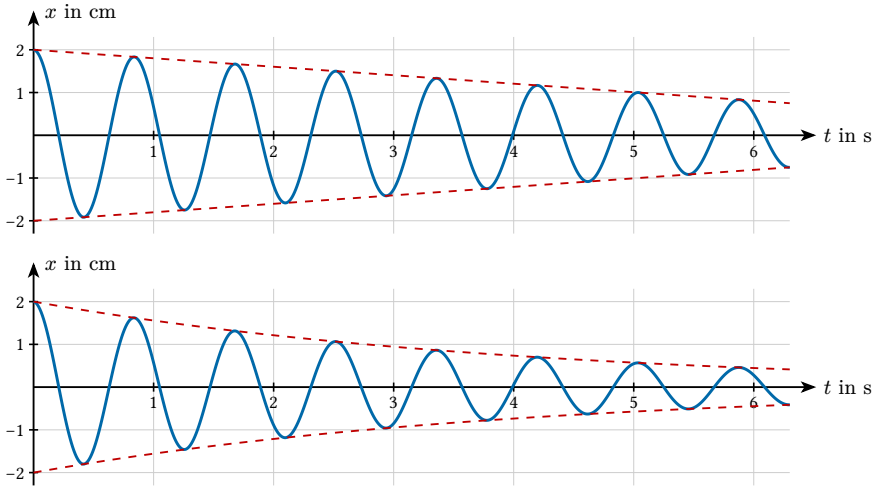


Abbildung 8: Zwei gedämpfte Schwingungen mit gleicher Periodendauer $T = 0{,}84$ s. Oben: konstante Reibungskraft (Gleitreibung) – die Amplitude nimmt **linear** ab, hier um $\frac{1}{6}$ cm pro Periode (Abiturdiagramm 2019). Unten: Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit (Luft, Wirbelstrom) – die Amplitude nimmt **exponentiell** ab, in gleichen Zeiten um denselben Faktor. Gestrichelt jeweils die Einhüllende.

Merksatz

- **Konstante Reibungskraft** (Gleitreibung): Die Amplitude nimmt in jeder Periode um denselben **Betrag** ab, die Einhüllende ist eine Gerade. Nach endlich vielen Schwingungen bleibt der Körper stehen.
- **Geschwindigkeitsproportionale Reibung** ($F_R = -bv$): Die Amplitude nimmt in jeder Periode um denselben **Faktor** ab, die Einhüllende ist eine Exponentialfunktion.
- In beiden Fällen gilt für die Energie in einem Umkehrpunkt weiterhin $E = \frac{1}{2}D\hat{x}^2$. Halbiert sich die Amplitude, bleibt ein Viertel der Energie.

Ausprobieren: **Fadenpendel** ↗ · **Pohlsches Rad: Dämpfung und Resonanz** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Dämpfung, Resonanz & erzwungene Schwingung** ↗ · **Harmonischer Oszillator** ↗

7.2 Exponentielle Dämpfung IQB-Pool

Nicht im Bildungsplan, aber in den Bildungsstandards (erhöhtes Niveau: gedämpfte Schwingungen). Die Formeln stehen in der Formelsammlung; die Herleitung ist Zusatz · nicht Abi.

Mit einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft lautet die Kraftgleichung $m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x}$. Man schreibt sie meist mit dem **Abklingkoeffizienten** $\delta = \frac{b}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$:

Merksatz

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Bei schwacher Dämpfung ($\delta < \omega_0$) ist die Lösung für einen zur Zeit 0 ausgelenkten Schwinger

$$x(t) = \hat{x}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_D t) \quad \text{mit} \quad \omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Die Amplitude halbiert sich jeweils nach der Zeit $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\delta}$. Die Energie fällt wie $e^{-2\delta t}$, also doppelt so schnell. Für $\delta \ll \omega_0$ ist $\omega_D \approx \omega_0$.

Beispiel 7

Die Amplitude eines Federpendels ($T = 0{,}84$ s) sinkt in 10 Perioden von 4,0 cm auf 2,0 cm. Dann ist $t_{\frac{1}{2}} = 8{,}4$ s und $\delta = \frac{\ln(2)}{8{,}4}\ \text{s} = 0{,}083\ \text{s}^{-1}$. Gegenüber $\omega_0 = 7{,}5\ \text{s}^{-1}$ ist das winzig; die Periodendauer ändert sich durch die Dämpfung um weniger als 0,01%.

Ist die Dämpfung sehr stark ($\delta \geq \omega_0$), schwingt der Körper gar nicht mehr, sondern kriecht nur in die Ruhelage zurück (**Kriechfall**). Genau das will man bei Stoßdämpfern im Auto oder bei Messgeräten mit Zeiger: Der Zeiger soll schnell und ohne Nachschwingen stehen bleiben.

Ausprobieren: **Federpendel** ↗ · **Pohlsches Rad: Dämpfung und Resonanz** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗ · **Dämpfung, Resonanz & erzwungene Schwingung** ↗

7.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz IQB-Pool

Nicht im Bildungsplan, aber in den Bildungsstandards (erhöhtes Niveau: Resonanz bei erzwungenen Schwingungen). Kam 2025 in einer baden-württembergischen Aufgabe vor (Boje mit Resonanzkurve). Qualitativ beschreiben und Resonanzkurven deuten können; die Formel der Kurve ist Zusatz · nicht Abi.

Ein System, das einmal angestoßen wird, schwingt mit seiner **Eigenfrequenz** f_0 (beim Federpendel $f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$). Man kann es aber auch von außen periodisch antreiben, etwa indem man das obere Ende der Feder mit einem Motor auf und ab bewegt. Nach einer Einschwingzeit schwingt das System dann mit der Frequenz f_E des **Erregers**, nicht mit seiner Eigenfrequenz – eine **erzwungene Schwingung**.

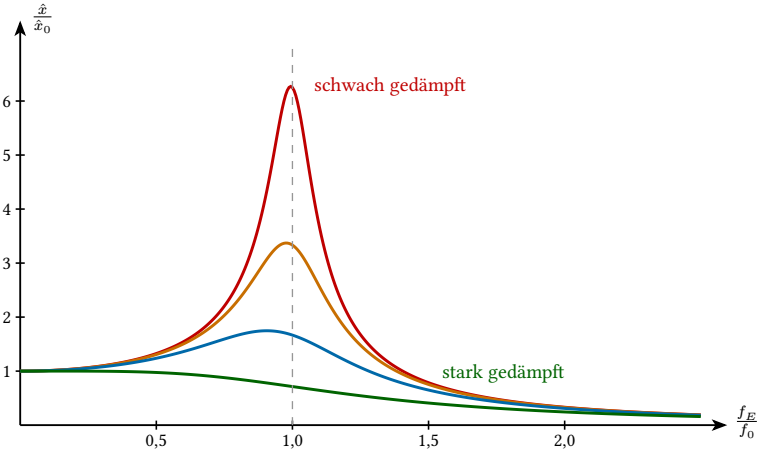


Abbildung 9: Resonanzkurven: Amplitude des angetriebenen Schwingers, bezogen auf seine Amplitude bei sehr langsamem Antrieb, über dem Verhältnis von Erreger- und Eigenfrequenz. Je schwächer die Dämpfung, desto höher und schmaler die Resonanzspitze. Berechnet nach $\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}}$ mit $\eta = \frac{f_E}{f_0}$ und dem Dämpfungsgrad $\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}08$; 0,15; 0,3; 0,7.

Merksatz

Resonanz: Die Amplitude einer erzwungenen Schwingung hängt von der Erregerfrequenz ab. Sie ist am größten, wenn die Erregerfrequenz (fast) mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, $f_E \approx f_0$. Dann nimmt der Schwinger in jeder Periode besonders viel Energie auf. Je schwächer die Dämpfung, desto höher und schmaler das Maximum.

- $f_E \ll f_0$: Der Schwinger folgt dem Erreger gleichphasig mit kleiner Amplitude.
- $f_E \approx f_0$: große Amplitude; der Schwinger hinkt dem Erreger um eine Viertelperiode hinterher.
- $f_E \gg f_0$: Der Schwinger kommt nicht mehr mit; er schwingt gegenphasig mit sehr kleiner Amplitude.

Resonanz ist im Alltag allgegenwärtig: Eine Schaukel schaukelt man hoch, indem man im Takt ihrer Eigenfrequenz anschiebt. Bei bestimmten Drehzahlen dröhnt ein Auto oder rattert eine Waschmaschine. Gefährlich wird Resonanz, wenn die Dämpfung klein ist und die Amplitude so groß wird, dass das System Schaden nimmt (**Resonanzkatastrophe**): Die Millennium Bridge in London geriet bei ihrer Eröffnung 2000 in seitliche Schwingungen, weil die Fußgänger unbewusst im Takt der Brücke liefen; sie musste nachträglich mit Dämpfern ausgerüstet werden. Erwünscht ist Resonanz dagegen bei Musikinstrumenten (Resonanzkörper), beim Radioempfang (Skript PL3) und in der Magnetresonanztomographie.

Selbsterregte Schwingungen Zusatz · nicht Abi

Eine Pendeluhr führt eine **ungedämpfte** Schwingung aus, obwohl Reibung wirkt. Der Trick: Das Pendel steuert selbst, wann ihm Energie zugeführt wird. Über die **Hemmung** bekommt es in jeder Periode im richtigen Moment einen kleinen Stoß aus dem Gewichts- oder Federantrieb – so viel, wie durch Reibung verloren geht. Ebenso arbeiten Unruh-Uhren, Quarzuhren und Orgelpfeifen (selbsterregte Schwingungen, Rückkopplung). Den elektrischen Fall, die Meißner-Schaltung, zeigt Skript PL3.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 144** (in der Sammlung Abi-ähnlich), **Aufgabe 17** (Abklingende Schwingung, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 18** (Resonanz am Federpendel, im Aufgabenskript).

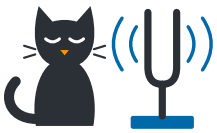
Typischer Fehler

Falsch: „Bei Resonanz wird die Amplitude unendlich groß."

Richtig: Das gilt nur ganz ohne Dämpfung. Real begrenzt die Dämpfung die Amplitude: Je stärker sie ist, desto niedriger und breiter wird die Resonanzkurve.

Resonanz bedeutet: Die **Erregerfrequenz** stimmt mit der **Eigenfrequenz** überein. Eine besonders große Erregeramplitude ist dafür nicht nötig.

Ausprobieren: **Pohlsches Rad: Dämpfung und Resonanz** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Dämpfung, Resonanz & erzwungene Schwingung** ↗



8 Überlagerung von Schwingungen

8.1 Verstärkung und Auslöschung Abi

Wirken auf einen Körper zwei Schwingungen gleichzeitig – etwa auf das Trommelfell zwei Töne –, addieren sich die Auslenkungen: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Man spricht von **Überlagerung** oder **Superposition**. Haben beide Schwingungen dieselbe Frequenz, entsteht wieder eine harmonische Schwingung dieser Frequenz. Ihre Amplitude hängt von der Phasendifferenz ab und lässt sich mit Zeigern bestimmen: Man legt die Zeiger aneinander, der Summenzeiger gibt Amplitude und Phase der Überlagerung.

Merksatz

Zwei Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude $\hat{x}$:

- **gleichphasig** ($\Delta\varphi = 0$): Die Zeiger liegen in einer Richtung, **Verstärkung** auf $2\hat{x}$,
- **gegenphasig** ($\Delta\varphi = \pi$): Die Zeiger zeigen entgegengesetzt, **Auslöschung**,
- allgemein: Die resultierende Amplitude ist $2\hat{x}\ \left|\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right|$.

Auslöschung durch Gegenphase nutzt man in Kopfhörern mit aktiver Geräuschunterdrückung: Ein Mikrofon nimmt das Störgeräusch auf, die Elektronik erzeugt ein gegenphasiges Signal, das den Lärm am Ohr weitgehend auslöscht („Gegenschall“). Bei Wellen (Skript PL2) entstehen aus demselben Prinzip die Interferenzmuster.

Ausprobieren: **Schwebung und gekoppelte Pendel** ↗ · **Fourier-Synthese** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Gekoppelte Oszillatoren & Normalmoden** ↗ · **Fourierreihen & Fouriertransformation** ↗

8.2 Schwebung Abi teilweise

Abi (3.6.3 (9)): die Schwebung qualitativ beschreiben und erklären. **Zusatz:** die Rechnung mit dem Additionstheorem.

Schlägt man zwei Stimmgabeln mit leicht verschiedenen Frequenzen f_1 und f_2 gleichzeitig an, hört man nicht zwei Töne, sondern einen Ton, dessen Lautstärke periodisch an- und abschwillt. Diese Erscheinung heißt **Schwebung**. Sie entsteht, weil die beiden Schwingungen abwechselnd fast gleichphasig (laut) und fast gegenphasig (leise) sind.

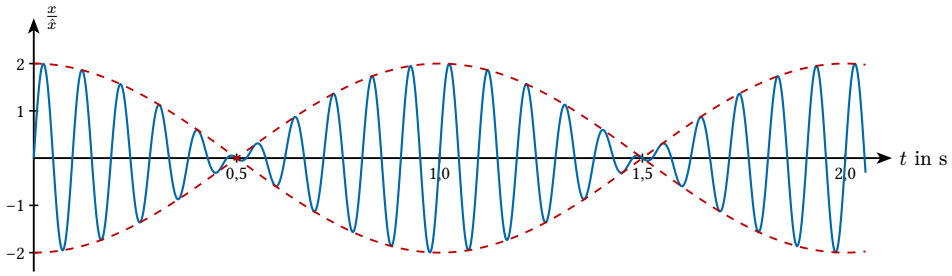


Abbildung 10: Schwebung aus zwei gleich starken Schwingungen mit $f_1 = 11$ Hz und $f_2 = 10$ Hz. Die resultierende Schwingung hat die mittlere Frequenz 10,5 Hz; ihre Amplitude schwillt mit der Einhüllenden (gestrichelt) an und ab. Laut ist es bei $t = 0$, 1 s, 2 s – die Schwebungsfrequenz ist $f_S = 1$ Hz.

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ wird die Überlagerung zweier gleich starker Schwingungen zu

$$x(t) = \hat{x}\sin(2\pi f_1 t) + \hat{x}\sin(2\pi f_2 t) = \underbrace{2\hat{x}\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right)}_{\text{langsam veränderliche Amplitude}} \cdot \sin\left(2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right).$$

Merksatz

Bei der Schwebung zweier gleich starker Schwingungen mit $f_1 \approx f_2$ hört man die **mittlere Frequenz** $f_R = \frac{f_1+f_2}{2}$. Die Lautstärke schwillt mit der **Schwebungsfrequenz**

$$f_S = |f_1 - f_2|$$

an und ab. Je näher die Frequenzen beieinander liegen, desto langsamer die Schwebung; bei $f_1 = f_2$ verschwindet sie.

Vorsicht mit dem Faktor 2

Die Einhüllende $\cos\left(\frac{2\pi(f_1-f_2)}{2}\cdot t\right)$ selbst hat die Frequenz $\frac{|f_1-f_2|}{2}$. Laut ist es aber bei jedem Maximum **und** jedem Minimum der Einhüllenden, denn das Ohr hört nur den Betrag der Amplitude. Deshalb ist die hörbare Schwebungsfrequenz $|f_1 - f_2|$. Manche Unterlagen nennen die Frequenz der Einhüllenden „Schwebungsfrequenz“ und schreiben $\frac{|f_1-f_2|}{2}$ – in einer Aufgabe immer darauf achten, welche Frequenz gemeint ist.

Musikerinnen und Musiker nutzen die Schwebung zum **Stimmen**: Man spielt den Ton des Instruments zusammen mit einer Stimmgabel und dreht so lange am Wirbel, bis die Schwebung verschwindet.

Zur Vertiefung: **Aufgabe 19** (Schwebung rechnerisch, im Aufgabenskript), **Aufgabe 20** (Zwei Hundepfeifen, im Aufgabenskript) und **Aufgabe 21** (Gitarre stimmen, im Aufgabenskript).

Ausprobieren: **Schwebung und gekoppelte Pendel** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Gekoppelte Oszillatoren & Normalmoden** ↗



9 Ausblick: elektromagnetische Schwingungen

9.1 Dieselbe Gleichung im Stromkreis Abi

Schwingungen gibt es nicht nur in der Mechanik. Schaltet man einen geladenen Kondensator mit einer Spule zusammen, pendelt die Ladung zwischen den Platten hin und her: ein **elektromagnetischer Schwingkreis**. Für die Ladung Q auf dem Kondensator gilt dann

$$L \cdot \ddot{Q}(t) = -\frac{1}{C} \cdot Q(t)$$

– dieselbe Differentialgleichung wie beim Federpendel, nur mit anderen Buchstaben. Deshalb ist auch die Lösung dieselbe: $Q(t) = \hat{Q}\cos(\omega t)$ mit $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (Thomsonsche Gleichung). Was man in diesem Skript über harmonische Schwingungen, Energie, Dämpfung und Resonanz gelernt hat, überträgt sich Wort für Wort:

Federpendel	Schwingkreis (Skript PL3)
Auslenkung x	Ladung Q
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$	Stromstärke $I = \dot{Q}$
Masse m (Trägheit)	Induktivität L
Richtgröße D	Kehrwert der Kapazität $\frac{1}{C}$
Spannenergie $\frac{1}{2}Dx^2$	elektrische Feldenergie $\frac{Q^2}{2C}$
kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$	magnetische Feldenergie $\frac{1}{2}LI^2$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Reibung dämpft	ohmscher Widerstand dämpft

Die ausführliche Behandlung mit Energieumwandlungen und dem Vergleich beider Schwinger (3.6.3 (6)–(8)) steht in Skript PL3, Kapitel „Elektromagnetischer Schwingkreis“. Von dort führt der Weg über den Hertzschen Dipol zu den elektromagnetischen Wellen und damit zum Licht (Skript PL4).

> Ausprobieren: **Federpendel und Schwingkreis im Vergleich** ↗ Üben: **noctua** ↗ Einordnen: **Harmonischer Oszillator** ↗ · **Elektromagnetischer Schwingkreis** ↗



10 Das Wichtigste auf einen Blick

Im Abitur 2027 liegt die Formelsammlung des IQB bereit. Die rechte Spalte zeigt, was man dort nachschlagen kann. Alles andere muss man selbst können oder schnell herleiten, vor allem jede Begründung:

Thema	Zusammenhang	Formelsammlung
Gravitation	$F_G = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$; $g = \frac{F_G}{m} = \frac{GM}{r^2}$; nahe der Erde homogen, $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$	**steht drin**
Grundgrößen	$f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi f$	**steht drin**
harmonische Schwingung	$x = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0)$, $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x} = -\omega^2 x$; $\hat{v} = \hat{x}\omega$, $\hat{a} = \hat{x}\omega^2$	**steht drin** (mit $s_{\max}$)
lineares Kraftgesetz	$F = -Dx \Leftrightarrow$ harmonische Schwingung	Gesetz: **steht drin** Begründung: nein
Differentialgleichung	$m\ddot{x} = -Dx$; Ansatz $x = \hat{x}\cos(\omega t)$ einsetzen, $\omega^2 = \frac{D}{m}$	Gleichung: **steht drin** Lösungsweg: nein
Federpendel	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$, unabhängig von $\hat{x}$ und (senkrecht) von g	**steht drin**
Fadenpendel	$\sin(\varphi) \approx \varphi$ für kleine Winkel, $D = \frac{mg}{l}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, unabhängig von m	T: **steht drin** Herleitung: nein
weitere Schwinger	U-Rohr: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$; Schwimmkörper: $D = \rho A g$; Federn: parallel $D_1 + D_2$, Reihe $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$	nein
Energie	$E = \frac{1}{2}D\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\hat{v}^2$, wächst mit $\hat{x}^2$	Einzelenergien: **steht drin**
Dämpfung	Gleitreibung: Amplitude linear; geschwindigkeitsproportional: exponentiell	nein
Überlagerung	gleichphasig verstärkt, gegenphasig löscht aus; Schwebung $f_S = \lvert f_1 - f_2 \rvert$	nein
IQB-Pool **Zusätzlich aus den Bildungsstandards**		
exponentielle Dämpfung	$x = \hat{x}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_D t)$, $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	**steht drin**
Resonanz	größte Amplitude bei $f_E \approx f_0$; Spitze umso höher und schmaler, je schwächer die Dämpfung	nein

